

# Моделирование решения обыкновенного дифференциального уравнения функционально-воксельным методом

А.В. Толок<sup>1</sup>, Н.Б. Толок<sup>2</sup>

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

<sup>1</sup> ORCID: 0000-0002-7257-9029, [tolok\\_61@mail.ru](mailto:tolok_61@mail.ru)

<sup>2</sup> ORCID: 0000-0002-5511-4852, [nat\\_tolok@mail.ru](mailto:nat_tolok@mail.ru)

## **Аннотация**

В данной работе рассматривается подход к моделированию обыкновенного дифференциального уравнения функционально-воксельным методом (ФВ-метод). Предложенный подход является автоматизированным развитием метода изоклин и базируется на принципах дифференцирования и интегрирования, разработанных для ФВ-моделирования. Анализируется метод изоклин как средство построения тангенциального поля к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого и второго порядка. На выбранных примерах демонстрируется принцип построения ФВ-модели как основы для получения интегральных кривых. Описывается алгоритм получения интегральной кривой дифференциального уравнения средствами ФВ-моделирования. Проводится визуальный и численный сравнительный анализ полученных результатов ФВ-моделирования с известными примерами. В отличие от метода изоклин, где результатом является графическое построение линий постоянного тангенса, в случае функционально-воксельной модели имеем графическое представление области локальных функций в каждой точке интегральной кривой, отвечающих решению задачи.

**Ключевые слова:** обыкновенные дифференциальные уравнения, функционально-воксельный метод (FV-метод), метод изоклин, интегральные кривые.

## **Постановка задачи**

Цель проведённых исследований заключается в принципиальном вопросе о возможности применения ФВ-моделирования в задачах, основанных на получении решения дифференциального уравнения. Реализация поставленной задачи востребована в связи с поступательным развитием инструментов ФВ-моделирования в задачах проектирования и управления, т.е. предлагается моделирование алгоритмов решения таких задач как: трассировка к цели с обходом препятствий [1], алгоритмов расчёта физических характеристик [2,5], алгоритмов решения задач математического программирования [6], дифференцирование и интегрирование ФВ-модели функции [7] и т.п.

В основу исследований выбран метод изоклин не случайно. Он базируется на предварительном построении на заданной области тангенциального поля и дальнейшего применения его данных в построении интегральных кривых. Принцип ФВ-моделирования аналогичен и требует предварительного построения соответствующей графической ФВ-модели для организации алгоритма решения какой-либо задачи.

# 1. Метод изоклин в решении дифференциального уравнения

Решению дифференциальных уравнений посвящено много исследований с применением различных подходов, причём каждый из таких подходов по тем или иным преимуществам имеет право на применение [8,9]

Один из графических методов решения обыкновенного дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  основан на построении изоклин, определяемых как линия фиксированной величины производной [10, 11, 15]. При этом, автоматизация такого подхода требует генерации тангенциальной поверхности в пространстве  $xOy$  и построения на ней изолиний, посечённых однонаправленными отрезками (касательными к интегральной кривой). На рисунке 1 показан типичный пример получения интегральных кривых для обыкновенного дифференциального уравнения  $y' = f(x)$ :

$$y' = x^2 - x - 2. \quad (1)$$

Здесь изоклины сонаправлены и параллельны оси  $Oy$ , поэтому отображать их не имеет смысла. Зато секущие их с фиксированным шагом отрезки, демонстрирующие направление касательной к интегральной кривой в данной точке, представляют наглядную картину общего решения данного дифференциального уравнения. Недостатком такого графического подхода является сложность применения полученных для зрительной оценки данных в построении достаточно точной картины из интегральных кривых (рис.1). Так же сложно представить применение результата такого подхода в автоматизированных расчётах. Для этого следует традиционно выражать из исходного дифференциального уравнения неопределённый интеграл и вычислять соответствующий коэффициент  $C$ , а это уже аналитический подход.

Отсутствие аналитического выражения в полученном графическом результате метода изоклин не позволяет исследователю с уверенностью применять его в расчётах, поскольку он скорее несёт в себе наглядность формы интегральных кривых, как правило с потерей точности значений. Поскольку область изоклин в данном случае описывает непрерывную поверхность, то существует интегральная кривая, проходящая через начало координат при  $C=0$ . Проведём численный эксперимент и определим оставшиеся корни для такой интегральной кривой.

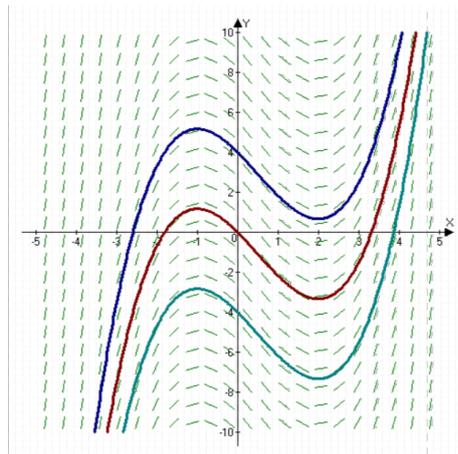


Рисунок 1 – Пример построения интегральных кривых по изоклинам

Проинтегрировав выражение (1) получим:

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C. \quad (2)$$

Найдём корни получившегося уравнения (2). Поскольку имеем дело с кубическим выражением, то кроме точки начала координат ось  $Ox$  может пересекаться ещё дважды. Приравниваем правую часть нулю и преобразовываем выражение:

$$x(2x^2 - 3x - 12) = 0. \quad (3)$$

Очевидно, что первый корень  $x_1 = 0$  и остаётся решить квадратное уравнение в скобках, чтобы получить остальные корни:

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{105}}{4} \approx 3,3117377, \quad x_3 = \frac{3 - \sqrt{105}}{4} \approx -1,8117377. \quad (4)$$

На рисунке 1 интегральная кривая (2) расположена посередине, изображена красным цветом и пересекает ось  $Ox$  в координатах (4). Понятно, что две других интегральных кривых построены для  $C = 4$  и  $C = -4$ .

Функционально-воксельный метод (ФВ-метод) [13] обеспечивает на задаваемой области аналитической функции заполнение локальными функциями, описывающими линейный закон для каждой минимальной окрестности точки на области, что позволяет применять в дальнейших вычислениях не просто число, а соответствующее аналитическое выражение со всеми вытекающими отсюда преимуществами.

Попробуем разобраться как, применив принципы функционально-воксельного моделирования, автоматизировать метод изоклин для компьютерного применения.

## 2. ФВ-метод для построения непрерывной поверхности изоклин

Чтобы решить уравнение (1) зададимся некоторой областью (по аналогии с выбранным примером на рисунке 1 выберем область  $x \in [-5; 5], y \in [-5; 5]$ ).

В функционально-воксельном методе частная производная  $\partial y / \partial x$  рассматривается как отношение  $\cos\alpha / \cos\beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – углы отклонения единичного градиентного вектора от осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Можно говорить, что:

$$y' = x^2 - x - 2 = \operatorname{tg}\alpha. \quad (5)$$

Принимая во внимание следующие равенства:  $\cos\alpha = \cos(\pi/2 - \arctg\alpha)$  и  $\cos\beta = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$  получаем коэффициенты при аргументах уравнения касательной для рассматриваемой точки, но проходящей через начало системы координат (локальная функция):

$$\cos\alpha x + \cos\beta y = 0. \quad (6)$$

Затем отображаем заданную область значений для каждого из косинусов в виде отдельного образа. Возникает правомерный вопрос: зачем одну поверхность тангенсов переводить в две поверхности косинусов? На самом деле ответ лежит на поверхности. Косинусные величины нормированы на промежутке  $[-1; 1]$ , что позволяет их легко перевести в цветовую палитру  $[0 \dots 255]$  для представления на компьютере в виде растровых образов:

$$\text{Color1} = \frac{(\cos\alpha + 1)256}{2} = (\cos\alpha + 1)128, \quad \text{Color2} = (\cos\beta + 1)128. \quad (7)$$

Такая информация является не только наглядной, но и сравнительно компактной относительно двумерного массива соответствующих вещественных величин. Плюс ко всему исчезает проблема представления бесконечно больших значений для вертикальных касательных и т.д. Принимая функцию  $y = f(x)$  за аргумент  $y$  на области получим два растровых образа, отвечающих за хранение  $\cos\alpha$  и  $\cos\beta$  на заданной области (рис.2). Далее такие образы будем называть М-образами как это принято в терминах ФВ-метода.

Покажем, что полученная графическая информация в виде двух М-образов (а,б) достаточна для автоматизации алгоритма построения интегральной кривой, изображённой на рисунке 1.



Рисунок 2 – Пример построения М-образов для поверхностей: а)  $\cos\alpha$  и б)  $\cos\beta$

### 3. Алгоритм построения интегральной кривой по двум М-образам

Чтобы организовать последовательность действий алгоритма построения интегральной кривой по М-образам, полученным на рисунке 2 необходимо определиться отношением габаритов реальной области функции, задаваемой вещественными числами, к разрешению М-образа, габариты которого целочисленные и содержат информацию о количестве точек по двум направлениям растра.

Исходя из разобранный ранее задачи область функции задана параметрами:

$$X_{min} = -5, X_{max} = 5, Y_{min} = -5, Y_{max} = 5.$$

Габариты М-образа  $X_{bmp} = 400, Y_{bmp} = 400$ . Определим коэффициент масштабирования по осям, обеспечивающий в расчётах переход от области функции к изображению и обратно:

$$K_x = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{bmp}}, K_y = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{Y_{bmp}}. \quad (8)$$

Поскольку М-образ содержит 400 точек вдоль оси  $Ox$ , и начало системы координат для области располагается посередине, а также имеется информация о том, что искомая интегральная кривая проходит через начало координат, то такую интегральную кривую предлагается строить сначала в положительном направлении полуоси из точки  $(0,0)$ , а затем в отрицательном.

Установим исходную точку в начало координат, пересчитав в координаты М-образа:

$$X = \frac{(x - X_{min})}{K_x}, \quad Y = \frac{(y - Y_{min})}{K_y}. \quad (9)$$

Не трудно догадаться, что при координатах  $(0,0)$  на М-образе точка окажется посередине окна с координатами  $(200, 200)$ . Для полученной точки на обоих М-образам присутствует конкретный цвет ( $Color1$  и  $Color2$ ), который при обратном преобразовании становится значением косинуса:

$$\cos\alpha = \frac{2Color1 - 256}{256}, \quad \cos\beta = \frac{2Color2 - 256}{256}. \quad (10)$$

Для получения локального уравнения в точке с координатами  $(0,0)$  найдем третью компоненту градиента окрестности этой точки:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha x - \cos\beta y. \quad (11)$$

В случае с первой точкой, когда обе координаты равны нулю  $\cos\gamma = 0$ , а значит прямая, описанная этой локальной функцией, действительно проходит через начало координат.

Чтобы определить значение следующей точки интегральной кривой осуществим сдвиг по оси  $Ox$  на шаг  $K_x$ :

$$y' = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}(x + K_x) - \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}. \quad (12)$$

Получив решение интегральной кривой в следующей точке, переходим к ней:

$$x = x + K_x, \quad y = y'. \quad (13)$$

Теперь снова рассчитываем координаты  $X, Y$  по формуле (9), получаем цвет  $Color1, Color2$  на двух М-образах в новой точке  $(X, Y)$ , чтобы определить для него новые  $\cos\alpha$  и  $\cos\beta$  по формуле (10). Определяем  $\cos\gamma$  для полученной точки по формуле (11) и переходим к определению новой точки интегральной кривой (12, 13) и далее повторяем процесс до тех пор, пока одна из координат не достигнет границы области.

Аналогично строится алгоритм в обратном направлении от заданной точки с той лишь разницей, что параметр  $\cos\gamma$  определяется для точки  $(x - K_x)$ , поскольку считаем, что текущая точка также принадлежит предыдущей окрестности.

На рисунке 3 демонстрируется пучок интегральных кривых для  $C = [-3, -1, -2, 0, 1, 2, 3]$ , для наглядности наложенных на М-образ с отображением значения  $\cos\alpha$ .

На полученной интегральной кривой можно заметить, что корни её функции при  $C=0$  соответствуют требуемым значениям (4).

Рассмотрим пример  $y' = f(x, y)$ , где в уравнении кроме аргумента  $x$  также присутствует и сама функция  $y$ . Для этого тоже выберем один из случаев, часто рассматриваемых в классических учебниках [16]:

$$y' = 2x - y. \quad (14)$$

Изображение с построением изоклин и полученных при этом интегральных кривых, и автоматическое построение интегральной кривой ФВ-методом демонстрируется на рисунке 4. Не сложно убедиться, что интегральная кривая, проходящая через начало координат имеет единственный корень в экстремальной точке. Приравняем к нулю производную для построения изоклины экстремумов:

$$y' = 2x - y = 0 \text{ или } y = 2x. \quad (15)$$

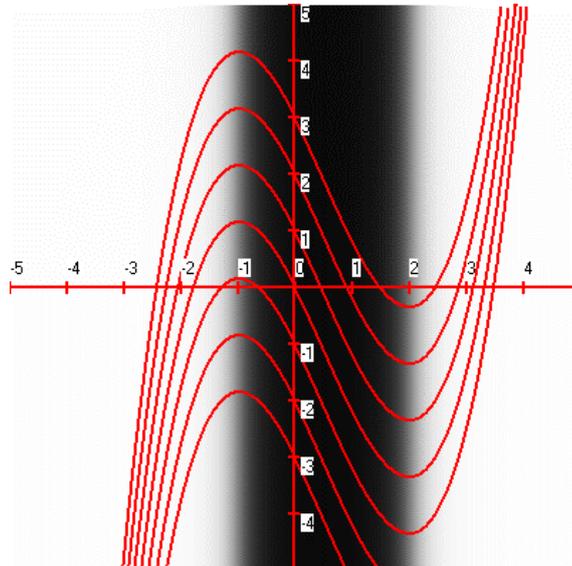


Рисунок 3 – Результат ФВ-построения интегральной кривой для (1)

Полученная прямая изоклины проходит через начало координат, а значит, в начале координат будет находится точка экстремума интегральной кривой для  $C=0$ . Установим туда исходную точку для работы алгоритма и запустим процесс построения интегральной кривой. Результат, подтверждающий корректность работы алгоритма пока-

зан на рисунке 4а. На рисунке 4б красным цветом отображена интегральная кривая, проходящая через точку начала координат.

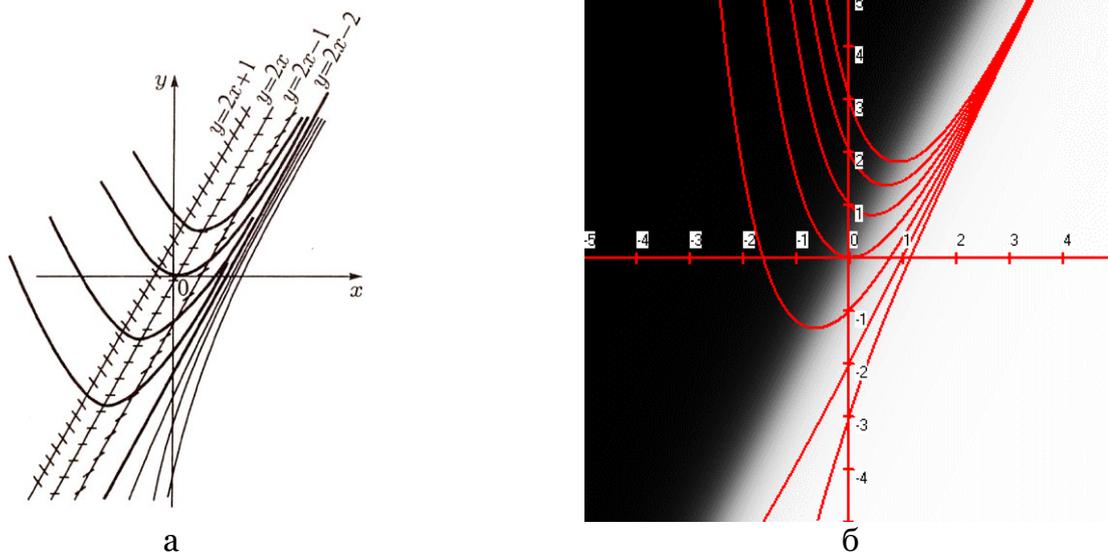


Рисунок 4 – Результат ФВ-построения интегральных кривых для (14): а) метод изоклин, б) ФВ-метод

Для работы алгоритма необходимо предварительно построить М-образы отображения на заданной области  $\cos\alpha$  и  $\cos\beta$  как показано на рисунке 5.

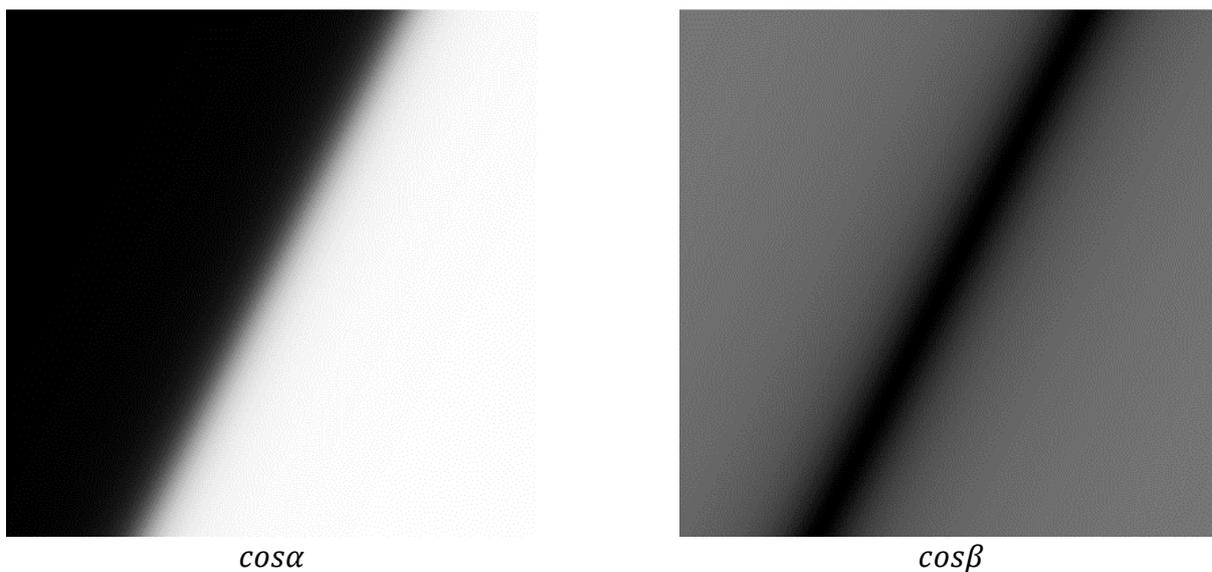


Рисунок 5 – отображение области изоклин в виде ФВ-модели для уравнения (1.14)

В качестве следующего примера предлагается рассмотреть квадратичное выражение дифференциального уравнения:

$$y' = y - x^2 + 2x - 2. \tag{16}$$

Результат построения изоклин и определение интегральных кривых в традиционном варианте демонстрируется на рисунке 6.

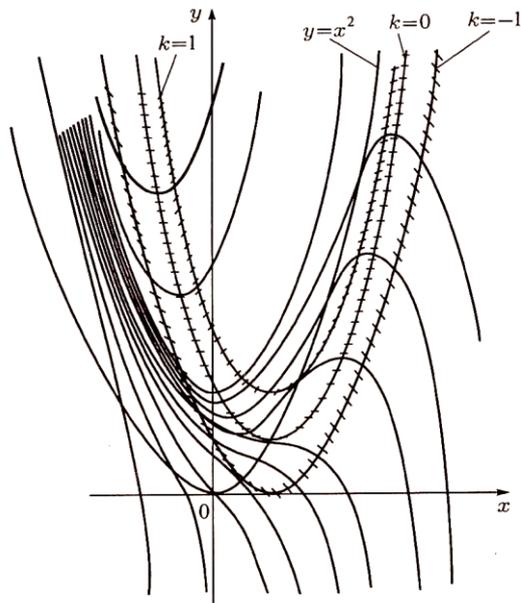


Рисунок 6 – построение интегральных кривых уравнения (16) методом изоклин

Зрительно выделим для себя на рисунке 6 интегральную кривую, проходящую через начало координат. Для работы алгоритма определим соответствующие М-образы, описывающие заданную область тангенциального поля, разложенного на косинусы. Результат построения таких М-образов демонстрируется на рисунке 7. Рисунок 8 демонстрирует решение задачи ФВ-методом.

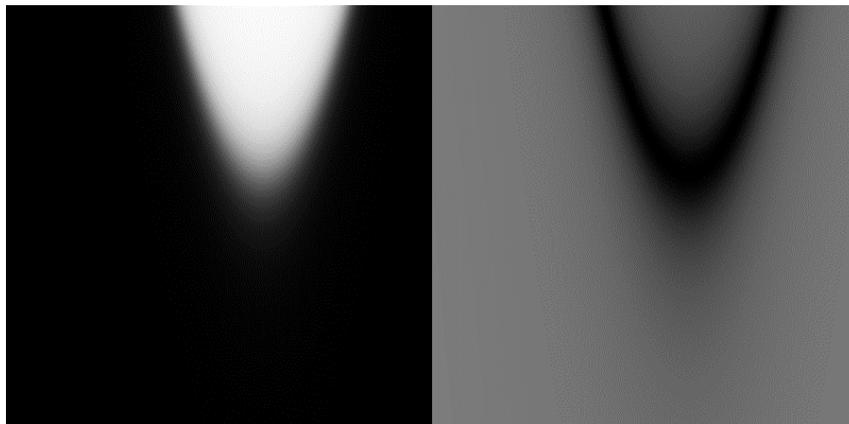


Рисунок 7 – отображение области изоклин в виде ФВ-модели для уравнения (16)

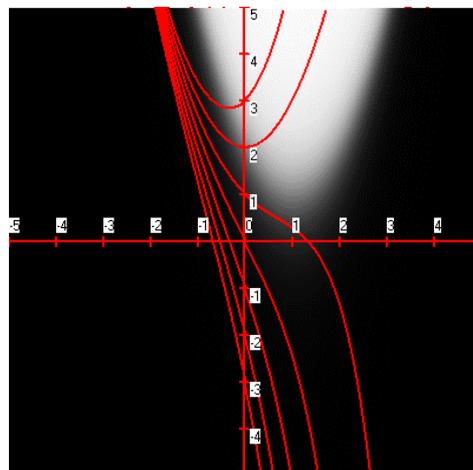


Рисунок 8 – Интегральные кривые уравнения (16)

Рассмотрим последний тестовый пример дифференциального уравнения первого порядка, включающего периодическую функцию:

$$y' = \sin(x + y). \quad (17)$$

Результат будем сравнивать с традиционным изображением, включённым во многие учебные пособия (рис.9) [15].

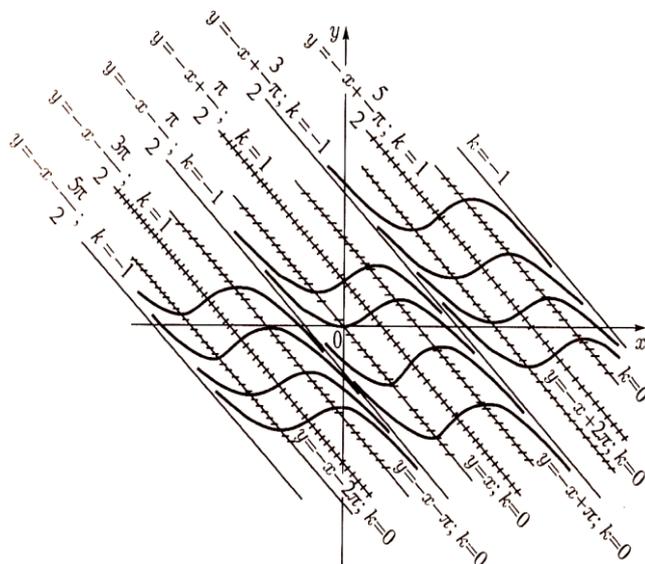


Рисунок 9 – Построение интегральных кривых уравнения (17)

Построим М-образы для решения уравнения (17) (рис.10) и применим предложенный алгоритм построения интегральной кривой к этим двум М-образам. Результат построения интегральных кривых для уравнения (17) демонстрируется на рисунке 11.

Проведённые исследования показывают, что применение функционально-воксельного моделирования в решении обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка позволяет перенести на автоматизированную основу графический метод изоклин с той лишь разницей, что образуемое при этом информационное поле отображает не значение тангенса, а базируется на информации о компонентах единичного вектора градиента на выбранной области исследования дифференциального уравнения.

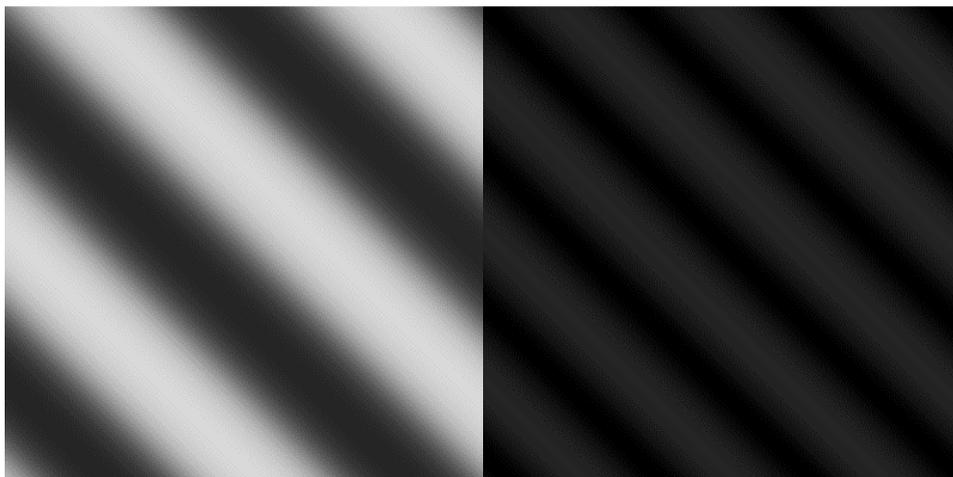


Рисунок 10 – отображение области изоклин в виде ФВ-модели для уравнения (17)

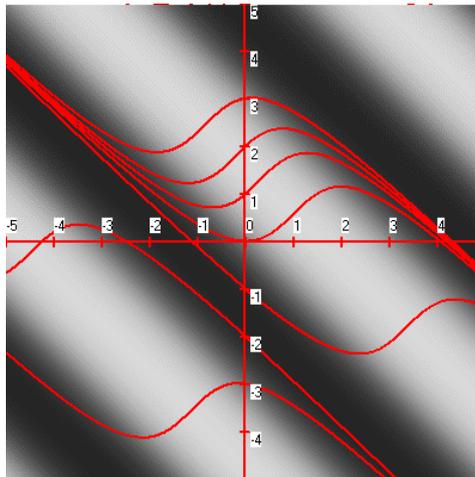


Рисунок 11 – Построение интегральной кривой для уравнения (17), проходящей через точку начала координат

#### 4. Решение обыкновенного интегрального уравнения второго порядка методом изоклин

Поскольку метод изоклин применяется также к решению некоторых уравнений второго порядка продемонстрируем решение примера, имеющего для сравнения изображение (рис.12) позаимствованное в работе [14]. Рассмотрим уравнения, приводимые к виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(\frac{dx}{dt}, x\right) = 0. \quad (18)$$

Вводится новая переменная  $v = dx/dt$ . Тогда имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v \frac{dv}{dx} \quad (19)$$

и уравнение (18) принимает вид уравнения первого порядка:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v, x)}{v}. \quad (20)$$

Рассмотрим пример решения дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \quad (21)$$

Полагаем, что  $dx/dt = v$ . Тогда уравнение (21) принимает вид:

$$v \frac{dv}{dx} + x = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{x}{v}. \quad (22)$$

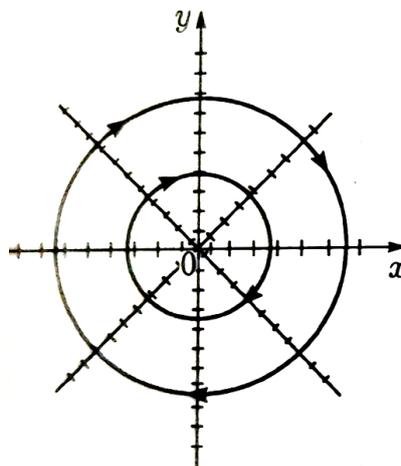


Рисунок 12 – Построение интегральных кривых методом изоклин для уравнения (19)

Применим функционально-воксельный подход к решению уравнения (19). Обратим внимание на то, что во всех примерах такого приведения исходного дифференциального уравнения к первому порядку подразумевается деление на функцию  $v$ , что приводит вдоль оси  $Oy$  к разрыву непрерывной поверхности (рис.13), поскольку функцию (22) для получения М-образов преобразуем в функцию:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (23)$$

Для построения интегральных кривых используем поочерёдно области  $x \in [-5; 5], y \in [-5; 0]$  и  $x \in [-5; 5], y \in (0; 5]$ , т.е. разобьём область задания функции на две подобласти до оси  $Oy$  и после. На рисунке 13 а и б приводится результат построения интегральных кривых при  $C=1, C=2$  и  $C=3$  для положительной области, а при  $C=-1, C=-2$  и  $C=-3$  для отрицательной.

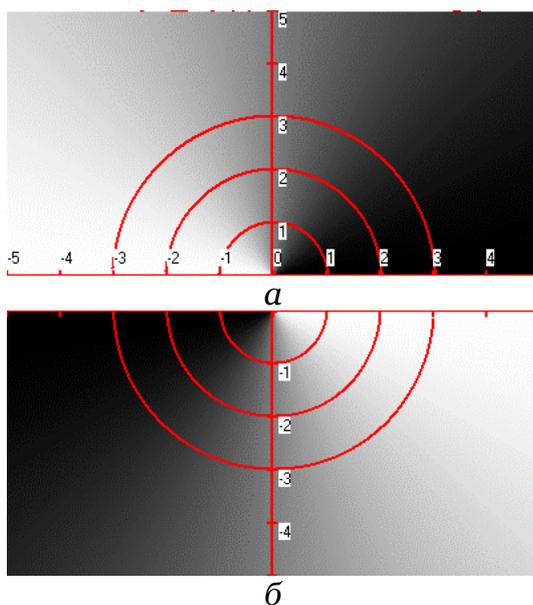


Рисунок 13 – Построение интегральных кривых ФВ-методом для уравнения (19):  
а) решение на области  $y \in (0; 5]$ , б) решение на области  $y \in [-5; 0)$

Не сложно в дальнейшем совместить эти два образа, чтобы получить полную картину.

## Выводы

Проведённые исследования показали возможность применения ФВ-моделирования в решении обыкновенных дифференциальных уравнений вида  $y' = f(x, y)$ . Продемонстрировано решение уравнение вида  $y'' = f(x, y', y)$ . Далее предполагается рассмотреть использование ФВ-моделирования в решении прикладных задач, основанных на применении обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка, разработка принципов работы алгоритма для обыкновенных дифференциальных уравнений вида:  $z' = f(x, y, z)$  и  $z'' = f(x, y, z, z')$ . Поскольку функционально-воксельная модель позволяет аналитически описать сложную геометрию на заданной области, то применение её в задачах движения жидкости или газа как основы для моделирования образуемых при этом дифференциальных законов, представляется авторам весьма перспективным и актуальным.

## Благодарности

*Исследование выполнено в рамках научной программы национального центра физики и математики, направление №9 «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах».*

## Список литературы

1. Васильев С.Н., Локтев М.А., Толок А.В., Толок Н.Б. К планированию маршрутов в 3D-среде с многовариантной моделью // Труды СПИИРАН. 2016. вып. 2(45). С. 5-25.
2. Плаксин А.М., Пушкарёв С.А. Геометрическое моделирование тепловых характеристик объектов функционально-воксельным методом // Геометрия и графика. 2020. Т. 8, № 1. С. 25-32.
3. А.В. Толок, М.А. Локтев, Н.Б. Толок, А.М. Плаксин, С.А. Пушкарёв. Визуальная диагностика физических величин на основе метода функционально-воксельного моделирования (2020). Научная визуализация 12.3: 51 - 60, DOI: 10.26583/sv.12.3.05
4. Alexey Tolok, Natalya Tolok. Arithmetic in Functional-Voxel Modeling (2022). Научная визуализация 14.3: 107 - 121, DOI: 10.26583/sv.14.3.08
5. Плаксин А.М., Пушкарёв С.А., Сычева А.А., Харланова П.М. Геометрическое моделирование средств визуализации напряжения на основе функционально-воксельного метода // Геометрия и графика. 2020. Т. 8, № 3. С. 36-43.
6. Tolok A,V, Tolok N.B. Mathematical Programming Problems Solving by Functional Voxel Method // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79 (72), Vol. 9 (No.12). С. 1703-1712 (345-354).
7. Толок А.В., Толок Н.Б. Дифференцирование и интегрирование в функционально-воксельном моделировании // Проблемы управления. 2022. № 5. С. 60-67.
8. Soundararajan, R.; Subburayan, V.; Wong, P. J.Y. Streamline Diffusion Finite Element Method for Singularly Perturbed 1DParabolic Convection Diffusion Differential Equations with Line Discontinuous Source / Mathematics. – 2023. – Vol. 11. – Art. no. 2034. – DOI: <https://doi.org/10.3390/math11092034>.
9. Mohammed, M. Well-Posedness for Nonlinear Parabolic Stochastic Differential Equations with Nonlinear Robin Conditions / Symmetry. – 2022. – Vol. 18. – Art. no. 1722.
10. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 384 с.
11. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. 344 с.
12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 472 с.
13. А.В. Толок, Н.Б. Толок. Функционально-воксельное моделирование задачи Коши (2024). Научная визуализация 16.1: 105 - 111, DOI: 10.26583/sv.16.1.09
14. Конев В.В. Уравнения в частных производных: Учебное пособие / В.В. Конев; Томский политехнический университет. – Режим доступа: <https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/notes/Partial.pdf>.
15. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. стереотип. М.: ЛЕНАНД, 2019. – 256 с. (Вся высшая математика в задачах.)

# Modeling the Solution of an Ordinary Differential Equation by the Functional Voxel Method

A.V. Tolok<sup>1</sup>, N.B. Tolok<sup>2</sup>

V.A. Trapeznikov Institute of Management Problems of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia

<sup>1</sup> ORCID: 0000-0002-7257-9029, [tolok\\_61@mail.ru](mailto:tolok_61@mail.ru)

<sup>2</sup> ORCID: 0000-0002-5511-4852, [nat\\_tolok@mail.ru](mailto:nat_tolok@mail.ru)

## **Abstract**

This work discusses an approach to modeling an ordinary differential equation by the Functional Voxel method (FV method). The proposed approach is an automated development of the isocline method and is based on the principles of differentiation and integration developed for FV modeling. The isocline method is analyzed as a mean of constructing a tangential field for solving the first and second order ordinary differential equation. The selected examples demonstrate the principle of constructing a FV model as a basis for obtaining integral curves. An algorithm for obtaining an integral curve of a differential equation by the means of the Functional Voxel modeling is described. A visual and numerical comparative analysis of the obtained results of the FV modeling with known examples is carried out. Unlike the isocline method, where the result is a graphical construction of constant tangent lines, in the case of a Functional voxel model we get a graphical representation of the area of local functions at each point of the integral curve corresponding to the solution of the problem.

**Keywords:** ordinary differential equations, Functional Voxel method (FV method), isocline method, integral curves.

## **References**

1. Vassilyev, S.N., Loktev, M.A., Tolok, A.V., Tolok, N.B., and Ulyanov, S.A., Route planning in 3D environment with a multivariant model, SPIIRAS Proc., 2016. no. 2(45), p. 5–25.
2. A.M. Plaksin, S.A. Pushkarev. Geometric modeling of thermal characteristics of objects using the functional-voxel method // Geometry and Graphics. 2020. V. 8, № 1. p. 25-32.
3. A.V. Tolok, M.A. Loktev, N.B. Tolok, A.M. Plaksin, S.A. Pushkarev. Visual diagnostics of physical quantities based on the functional-voxel modeling method (2020). Scientific Visualization 12.3: 51 - 60, DOI: 10.26583/sv.12.3.05
4. Alexey Tolok, Natalya Tolok. Arithmetic in Functional-Voxel Modeling (2022). Scientific Visualization 14.3: 107 - 121, DOI: 10.26583/sv.14.3.08
5. Plaksin A.M., Pushkarev S.A., Sycheva A.A., Harlanova P.M. Geometric modeling of stress visualization tools based on the functional voxel method // Geometry and Graphics. 2020. V. 8, № 3. p. 36-43.
6. Tolok A.V., Tolok N.B. Mathematical Programming Problems Solving by Functional Voxel Method // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79 (72), Vol. 9 (No.12). p. 1703-1712 (345-354).
7. Tolok A.V., Tolok N.B. Differentiation and Integration in Functional Voxel Modeling // CONTROL SCIENCES. 2022. № 5. p. 51-57.
8. Soundararajan, R.; Subburayan, V.; Wong, P. J.Y. Streamline Diffusion Finite Element Method for Singularly Perturbed 1D Parabolic Convection Diffusion Differential Equations with Line Discontinuous Source / Mathematics. – 2023. – Vol. 11. – Art. no. 2034. – DOI: <https://doi.org/10.3390/math11092034>.

9. Mohammed, M. Well-Posedness for Nonlinear Parabolic Stochastic Differential Equations with Nonlinear Robin Conditions / Symmetry. – 2022. – Vol. 18. – Art. no. 1722.
10. Egorov A.I. Ordinary differential equations with applications. M.: Phismatlit, 2003. 384 pp.
11. Romanenko V.K. The course of differential equations and calculus of variations. M.: Laboratory of basic knowledge, 2000. 344 pp.
12. Stepanov V.V. The course of differential equations. M.: Editorial URSS, 2004. 472 pp.
13. A.V. Tolok, N.B. Tolok. Functional-Voxel Modeling of The Cauchy Problem (2024). Scientific Visualization 16.1: 105 - 111, DOI: 10.26583/sv.16.1.09
14. Konev V.V. Partial equations: Tutorial / Tomsk Polytechnic University. – <https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/notes/Partial.pdf>.
15. Krasnov M.L., Kiselyov A.I., Makarenko G.I. Ordinary differential equations: Problems and examples with detailed solutions: Subject guide. Stereotype. M.: Lenand, 2019. – 256 pp. (All Higher Mathematics in problems)