

Визуализация течений вязкой проводящей жидкости с учетом наличия примесей в поле течения, соответствующих точным решениям уравнений МГД

В.А. Галкин^{1,А,В}, А.О. Дубовик^{2,А,В}

^А Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН

^В Сургутский государственный университет

¹ ORCID: 0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

² ORCID: 0000-0002-4158-9646, alldubovik@gmail.com

Аннотация

В данной работе рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики (МГД), дополненная уравнением конвекции-диффузии, которые описывают течение вязкой проводящей несжимаемой жидкости с учетом наличия примесей в ней. Современные программные средства научной визуализации, такие, например, как ParaView, предоставляют широкий спектр возможностей для наглядного изображения и, следовательно, более ясного представления структуры таких течений, особенно в трехмерном случае. Данная возможность позволяет проанализировать, сделать выводы, отметить особенности исследуемых течений жидкости, и активно использовалась при подготовке этой публикации.

Рассматриваемая модель МГД является интенсивным полем исследований многих ученых, однако, подавляющее большинство работ посвящено исключительно численному моделированию, а исследованию точных решений для данных задач уделено крайне мало внимания. В статье рассмотрены классы точных решений уравнений МГД и связанного с ними уравнения конвекции-диффузии. Найденные точные решения можно использовать для верификации разработанных численных алгоритмов решения обсуждаемых задач. Кроме того, найденные точные решения описывают течения жидкости в пористой среде и связаны с вопросами разработки ядерного симулятора, который позволит моделировать внутрипластовые эффекты. В свою очередь, это связано с созданием отечественной технологии «цифровое месторождение» и задачами управления параметрами несжимаемой жидкости. Для нефтегазовой отрасли решение данного класса задач позволит проводить оптимизационные воздействия различных типов (механических, электромагнитных, тепловых и т. д.) с целью увеличения коэффициента извлечения нефти.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, точные решения, визуализация течения жидкости, конвекция-диффузия.

1. Введение

Рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики (МГД) [1, 2], описывающая течение вязкой проводящей жидкости в области с учетом наличия примесей в поле течения $\{x_1, x_2, x_3\} \in D, t > 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{curl} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] + \mu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left(p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) n = \chi \Delta n, \quad (5)$$

где \mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля, \mathbf{u} – вектор скорости жидкости, t – время, μ_m – магнитная вязкость жидкости, ρ_0 – плотность жидкости, p – давление, μ – кинематическая вязкость, n – концентрация примесей в жидкости, χ – коэффициент диффузии. Отметим, что поле давления p определяется из уравнений (1) – (5) с точностью до произвольной функции времени.

Рассматриваемые в работе классы течений имеют сложную структуру, особенно течения в пространстве, поэтому, для более ясного их представления и анализа необходимо использование современных средств научной визуализации. При подготовке этой публикации использовался ParaView (<https://www.paraview.org>).

Создание отечественной технологии «цифровое месторождение» [3–5] предполагает возможность разработки kernового симулятора, позволяющего моделировать динамику жидкости в зависимости от внешних воздействий (теплого, электромагнитного, химического, механического и др.) и в дальнейшем ставить задачи об их оптимизации с целью извлечения прибыли от эксплуатации месторождений. Исследованию влияния тепловых эффектов на структуру течения посвящены работы [6–9], в том числе и для таких вязких жидкостей как нефть [8]. Представленный класс задач позволяет включить в рассмотрение модели деформации пластов в задачах гидрогеодинамики, описанные в [10].

Исследуемая модель течения жидкости с учетом конвективной диффузии является интенсивным полем исследований [11–14]. Однако, все эти исследования посвящены исключительно вопросам численного решения указанных задач. Результаты численного моделирования необходимо верифицировать точными решениями. Представлению различных классов точных решений уравнений МГД с учетом наличия примесей в поле течения и посвящена данная работа.

Рассмотрение ниже представленных точных решений связано с вопросом построения kernового симулятора и описывает динамику жидкости в пористой среде. Простейшая модель пористой среды содержит дискретный набор точек – узлы сетки ∂D . Тогда областью течения жидкости является $D \equiv \mathbb{R}^n \setminus \partial D$. В таком случае на границе области течения должно выполняться условие прилипания. Представленные ниже точные решения рассматриваются при различных начальных и граничных условиях в зависимости от конкретной обсуждаемой подмодели модели (1) – (5). В приведенных ниже точных решениях полагается $\rho_0 = \chi = 1$, $\mu_m = \mu$. Решения 2.1.2 и 3.2.2 уже опубликованы в [15], остальные полученные выражения публикуются впервые.

Общие комментарии к рисункам, представленным в статье, следующие. Белые линии и стрелки на рисунке соответствуют линиям тока и направлению векторного поля, как правило, вектора скорости жидкости. В параграфах 2, 3 рисункам соответствует фрагмент области течения – квадрат со стороной $2l$ с центром в начале координат, т. е. углам квадрата соответствуют точки с координатами $\pm l$. В параграфах 4, 5 рисунки иллюстрируют течения на сфере радиуса 5 . Как правило, кроме оговоренных специально случаев, анимация на рисунках соответствует изменению течения по времени с $t=0$ до $t=1$ с шагом 0.2 .

2. Уравнения гидродинамики

Рассматривается следующая подмодель уравнений (1) – (5), состоящая из уравнения (2) и уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (6)$$

На границе области течения выполняются условия прилипания

$$\mathbf{u}|_{\partial D} = 0. \quad (7)$$

Все приведенные в параграфах 2, 3 примеры точных решений рассматриваются в области, имеющую периодическую структуру и состоящей из квадратов или кубов длиной $2l$. В случае, если указанные структуры имеют иной размер, то в результате применения замены пространственно-временных переменных придем к ниже приведенным формулам.

2.1 Точные решения на плоскости

Пусть область D – плоская сетка, состоящая из ячеек с длиной и шириной равной $2l$.

1. Если начальное условие имеет вид

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \{\cos x_2; -\cos x_1; 0\},$$

то точное решение задачи (2), (6), (7) имеет вид

$$\mathbf{u} = e^{-\mu t} \{\cos x_2; -\cos x_1; 0\}, \quad p = -e^{-2\mu t} \sin x_1 \sin x_2.$$

В этом случае границей области течения ∂D являются точки $x_1, x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Из

рис. 1 видно, что течение жидкости структурируется на квадраты, внутри которых вращаются вихри с центрами, расположенными в узлах сетки ∂D , в которых скорость течения обращается в нуль. На границах квадратов, расположенных под углами $\pm \frac{\pi}{4}$ и

центрами на сетке, жидкость скользит по касательной. Аналогичная структура течения для проводящей жидкости наблюдалась при описании точного решения уравнений МГД с условием скольжения на границе параллелепипеда [16].

Отметим, что исследуемые здесь течения известны в природе как квадратные волны. Эти волны представляют собой сетчатый рисунок из множества квадратов на поверхности моря. Это достаточно сильные волны и могут изменять траекторию судов в непредсказуемом направлении. Квадратные волны формируются из двух различных групп волн, сходящихся под разными углами, не превышающими, как правило, 45° .

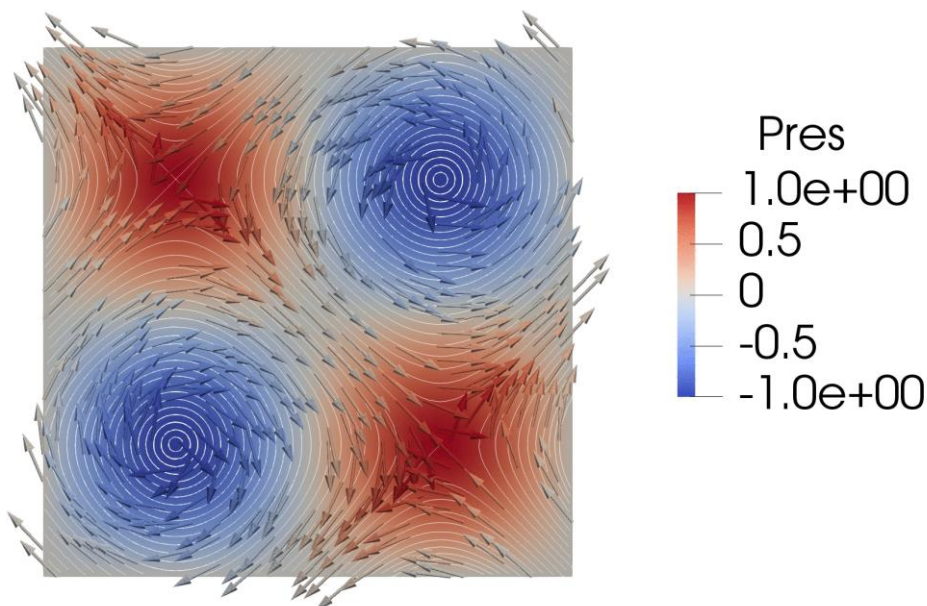


Рис. 1. Структура течения, соответствующая решению 2.1.1

2. Если начальное условие имеет вид

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \left\{ \sin(\sqrt{\lambda}x_2); \sin(\sqrt{\lambda}x_1); 0 \right\}, \lambda > 0,$$

то точное решение задачи (6) – (8) имеет вид

$$\mathbf{u} = e^{-\mu\lambda t} \left\{ \sin(\sqrt{\lambda}x_2); \sin(\sqrt{\lambda}x_1); 0 \right\}, p = e^{-2\mu\lambda t} \cos(\sqrt{\lambda}x_1) \cos(\sqrt{\lambda}x_2).$$

В этом случае границей области течения ∂D являются точки $x_1, x_2 = \frac{\pi n}{\sqrt{\lambda}}, n \in \mathbb{Z}$. На

рис. 2 проиллюстрирована структура течения, соответствующая рассматриваемому в данном пункте точному решению при значении $\lambda=4$. Точно так же, как и в предыдущем случае, течение жидкости разбивается на квадраты с вращающимися вихрями, в центре которых скорость течения равна нулю.

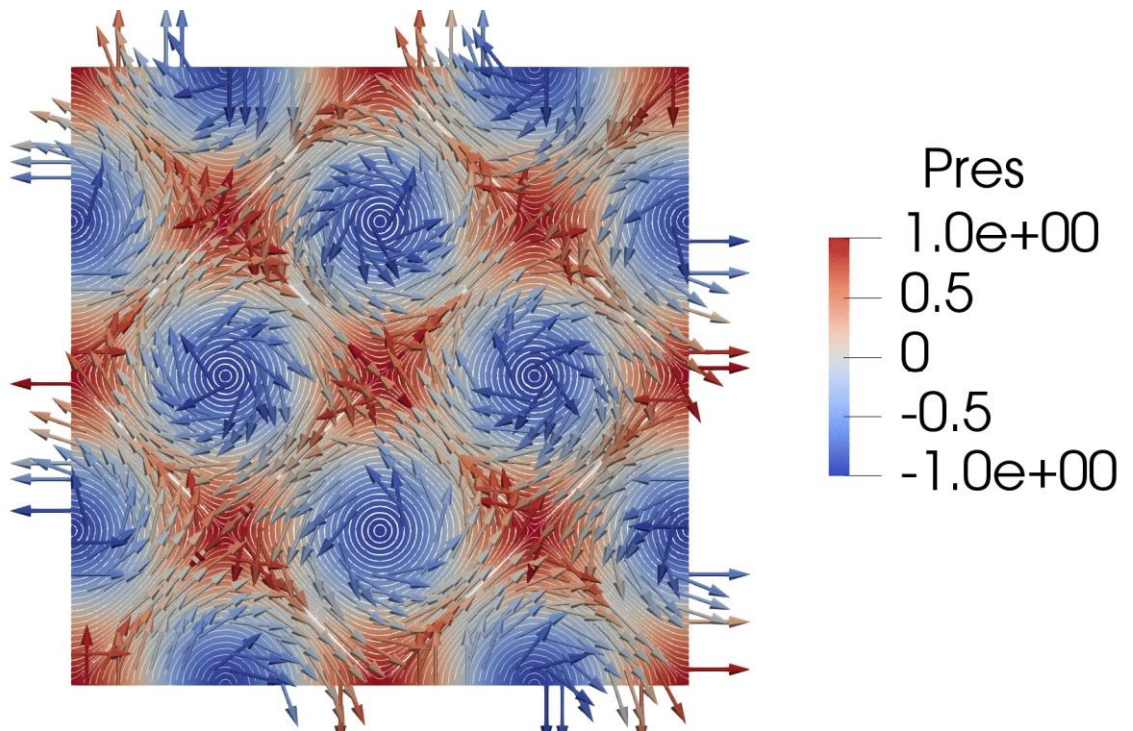


Рис. 2. Структура течения, соответствующая решению 2.1.2

2.2 Точные решения в пространстве

1. Если начальное условие имеет вид

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \left\{ \exp(\lambda(x_3 - \varphi(0))) \sin x_2; \exp(-\lambda(x_3 - \varphi(0))) \sin x_1; \varphi'(0) \right\},$$

где λ – произвольный параметр, то точное решение задачи (2), (6), (7) имеет вид

$$\mathbf{u} = \left\{ \exp\left(\left(\lambda^2 - 1\right)\mu t\right) \exp(\lambda(x_3 - \varphi(t))) \sin x_2; \exp\left(\left(\lambda^2 - 1\right)\mu t\right) \exp(-\lambda(x_3 - \varphi(t))) \sin x_1; \varphi'(t) \right\},$$

$$p = \exp\left(2\left(\lambda^2 - 1\right)\mu t\right) \cos x_1 \cos x_2 - \varphi''(t) x_3,$$

где $\varphi(t)$ – произвольная функция времени. В этом случае границей области течения ∂D являются точки $x_1, x_2 = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

На рис. 3–5 проиллюстрировано изменение с течением времени структуры течения, соответствующего рассматриваемому точному решению, в зависимости от времени при значении параметра $\lambda=2$ и при $\varphi(t) = \frac{t^2}{2}$. Рисунки иллюстрируют течение жидкости в

плоскости x_1Ox_2 (рис. 3) и плоскостях ей параллельных, проходящих через точки с координатами $(0, 0, 1)$ для рис. 4 и $(0, 0, 2)$ для рис. 5. Из иллюстраций следует, что течение жидкости с течением времени становится менее структурированным, а при увеличении значений координаты x_3 происходит выпрямление течения вдоль оси Ox_1 . Аналогичное замечание справедливо и при уменьшении значений координаты x_3 , однако выпрямление течения теперь происходит вдоль оси Ox_2 . Поле давления с течением времени приобретает ячеистую структуру.

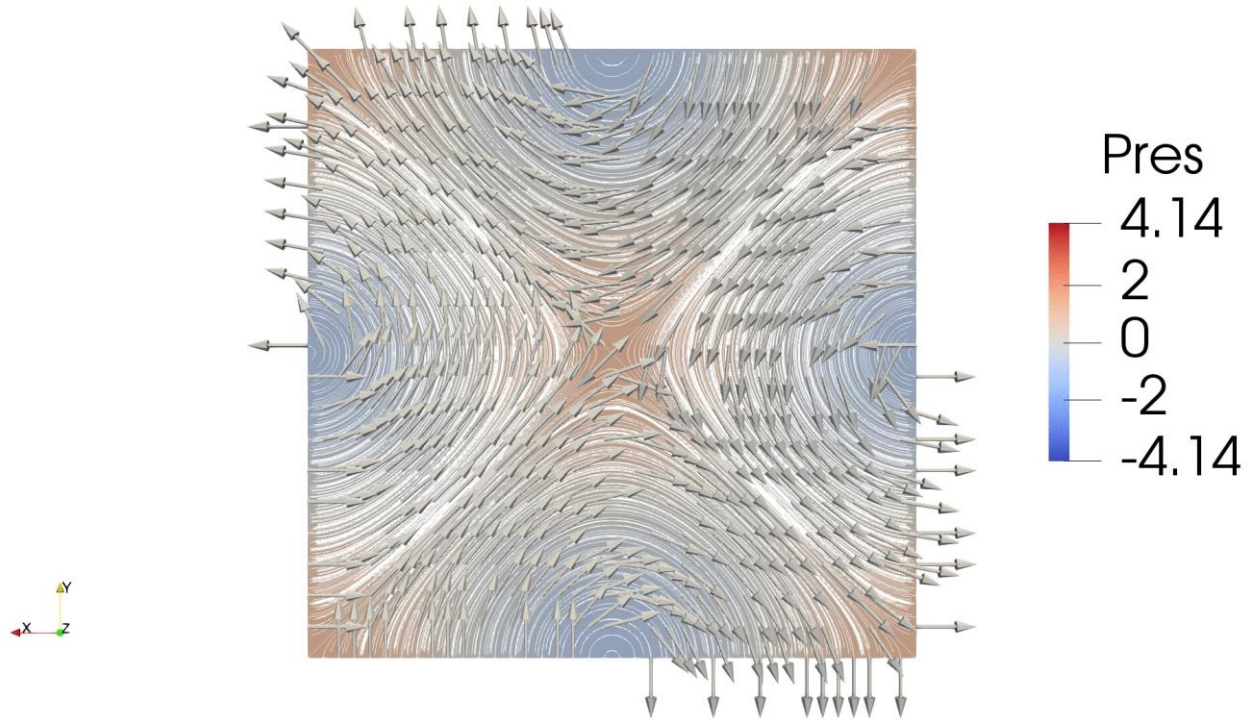


Рис. 3. Структура течения 2.2.1 в плоскости x_1Ox_2

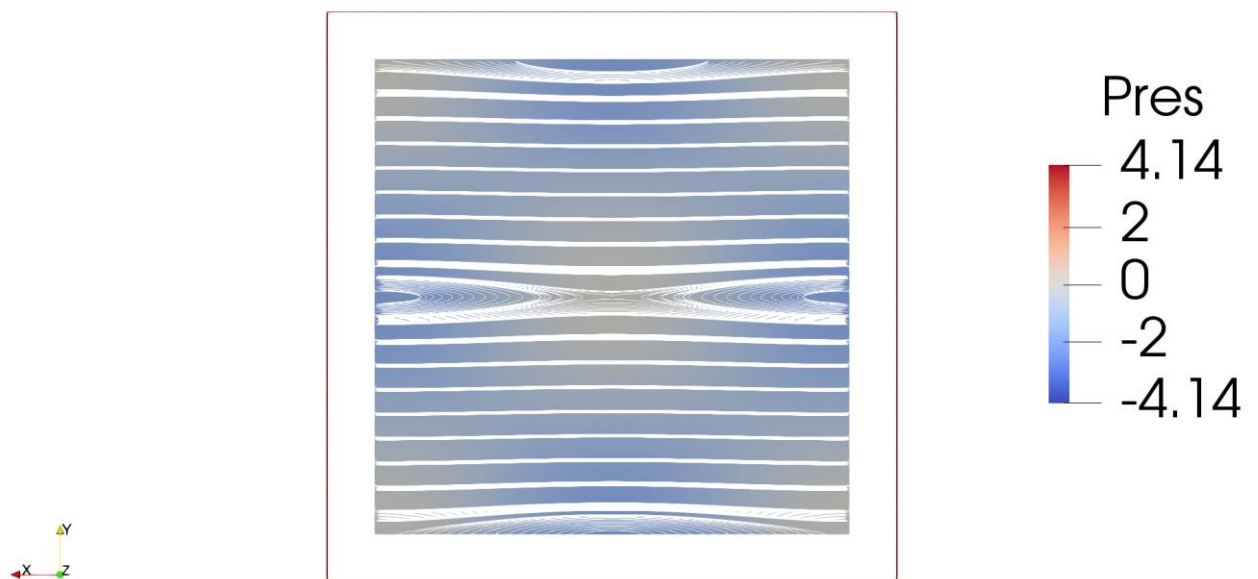


Рис. 4. Структура течения 2.2.1 в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точку $(0, 0, 1)$

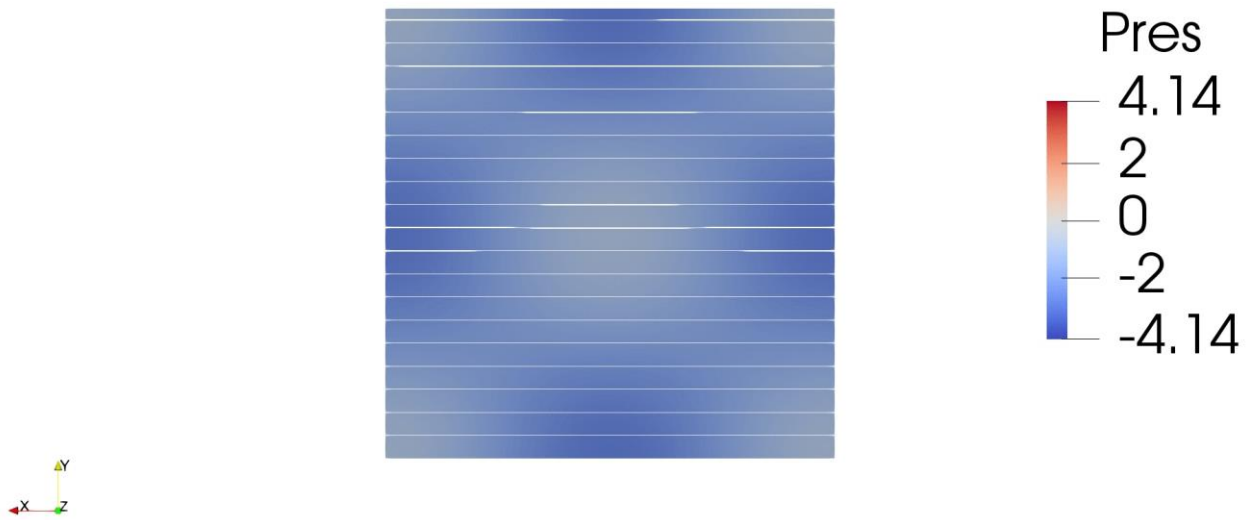


Рис. 5. Структура течения 2.2.1 в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точку $(0, 0, 2)$

2. Пусть область D – пространственная сетка, состоящая из ячеек с длиной, шириной и высотой равной 2π . Если начальное условие имеет вид

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \{\sin x_2 - \cos x_3; \sin x_3 - \cos x_1; \sin x_1 - \cos x_2\},$$

то точное решение задачи (6) – (8) имеет вид

$$\mathbf{u} = e^{-\mu t} \{\sin x_2 - \cos x_3; \sin x_3 - \cos x_1; \sin x_1 - \cos x_2\}, \quad p = -\frac{\mathbf{u}^2}{2}.$$

В этом случае границей области течения ∂D являются точки $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Чтобы представление о структуре течения жидкости (рис. 6–9) стало более наглядным, необходимо выполнить следующее преобразование координат: выразить все косинусы, фигурирующие в точном решении для поля скорости через синусы и сделать замену

$$\xi_i = \frac{x_j + x_k}{2},$$

где все индексы $i, j, k = 1, 2, 3$ разные. На рис. 6–9 проиллюстрирована структура течения в плоскости, параллельной x_1Ox_2 и проходящей через точки вида $x_1=x_2=x_3=-\pi, -\pi/2, -\pi/4, \pi/4$ соответственно, в зависимости от времени. Из рисунков 6–9 следует, что течение жидкости обладает структурой к каждой ячейке, при этом, линии тока в ячейках совпадают в каждом случае, но направления течения в соседних ячейках меняется на противоположное. Отметим, что при рассмотрении течения в плоскости параллельной x_1Ox_2 и проходящей через точки $x_1=x_2=x_3=\pi$ получается такая же картина течения, что и на рис. 6, а случае точки $x_1=x_2=x_3=\pi/2$ – такая же картина течения, что и на рис. 7.

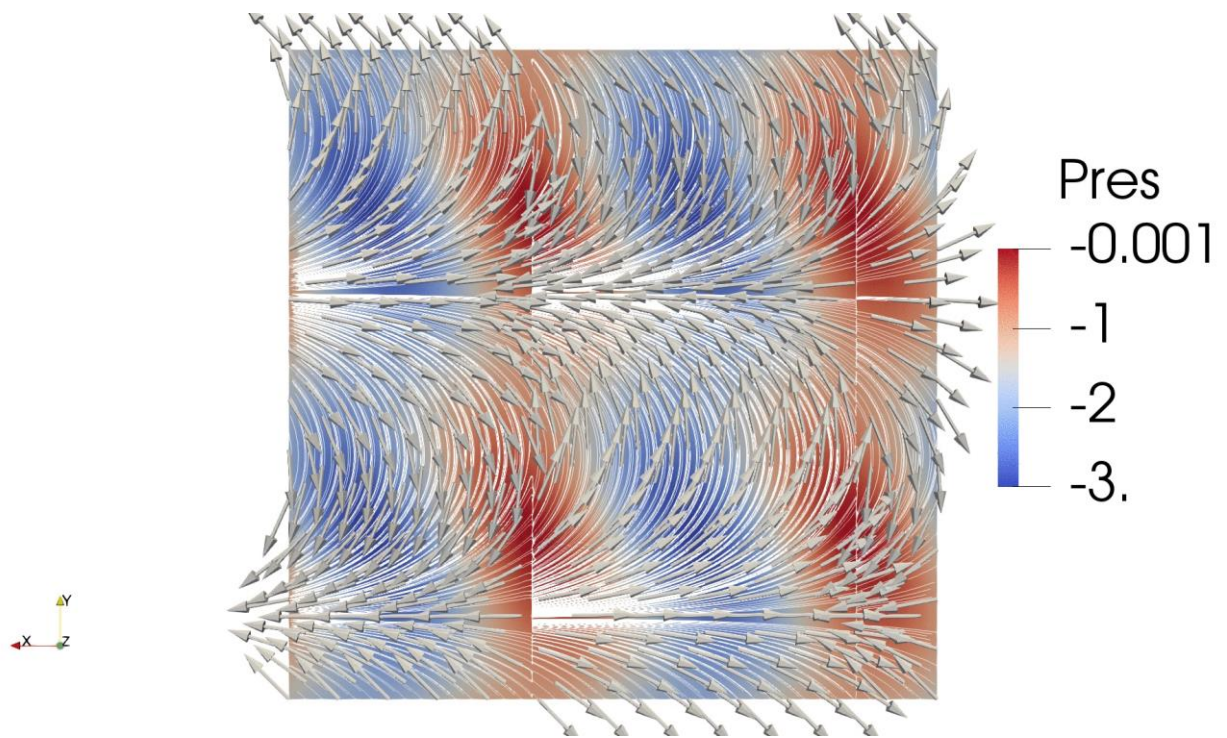


Рис. 6. Структура течения 2.2.2 в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точку $(-\pi, -\pi, -\pi)$

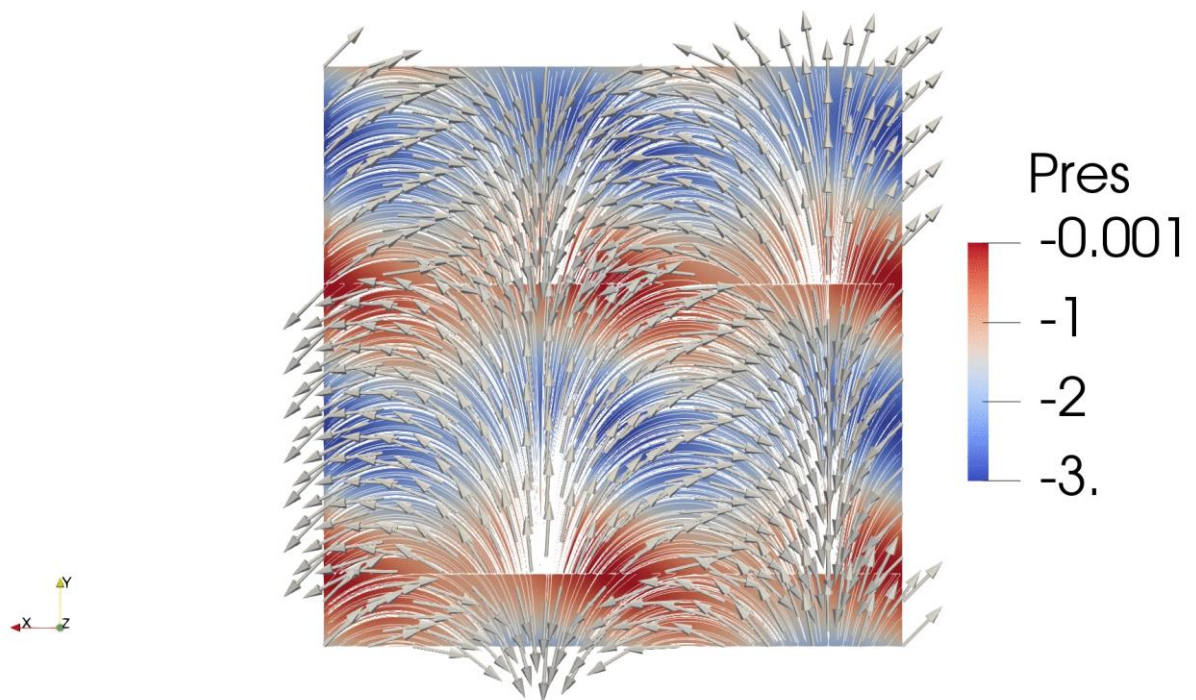


Рис. 7. Структура течения 2.2.2 в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точку $(-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2)$

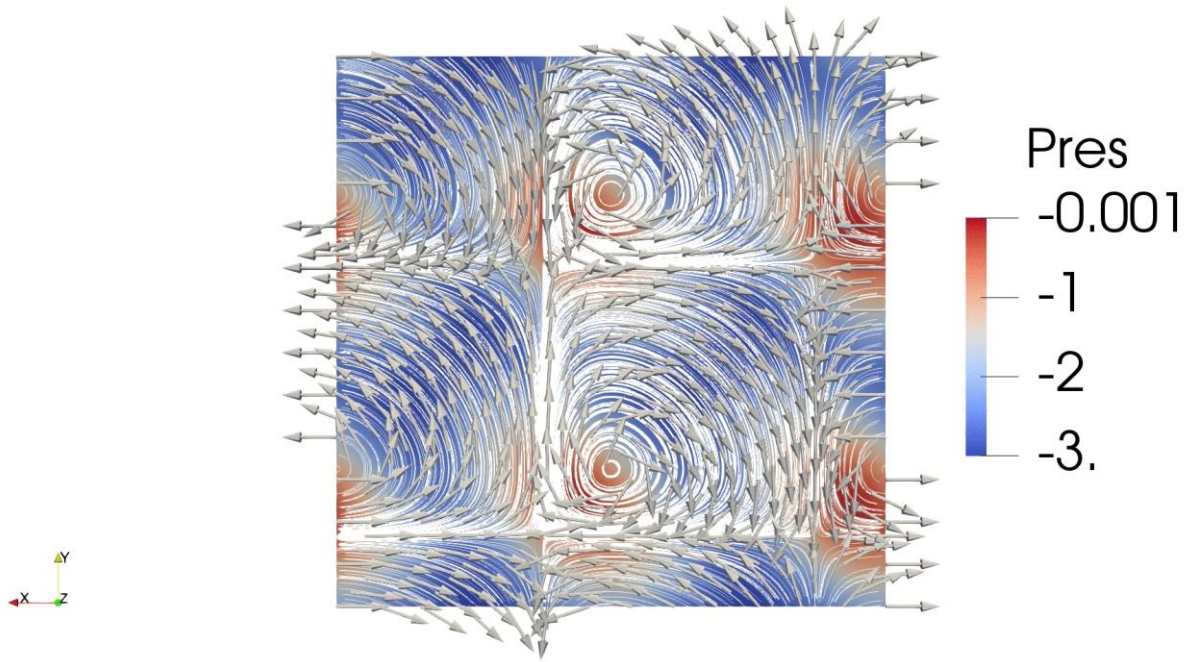


Рис. 8. Структура течения 2.2.2 в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точку $(-\pi/4, -\pi/4, -\pi/4)$

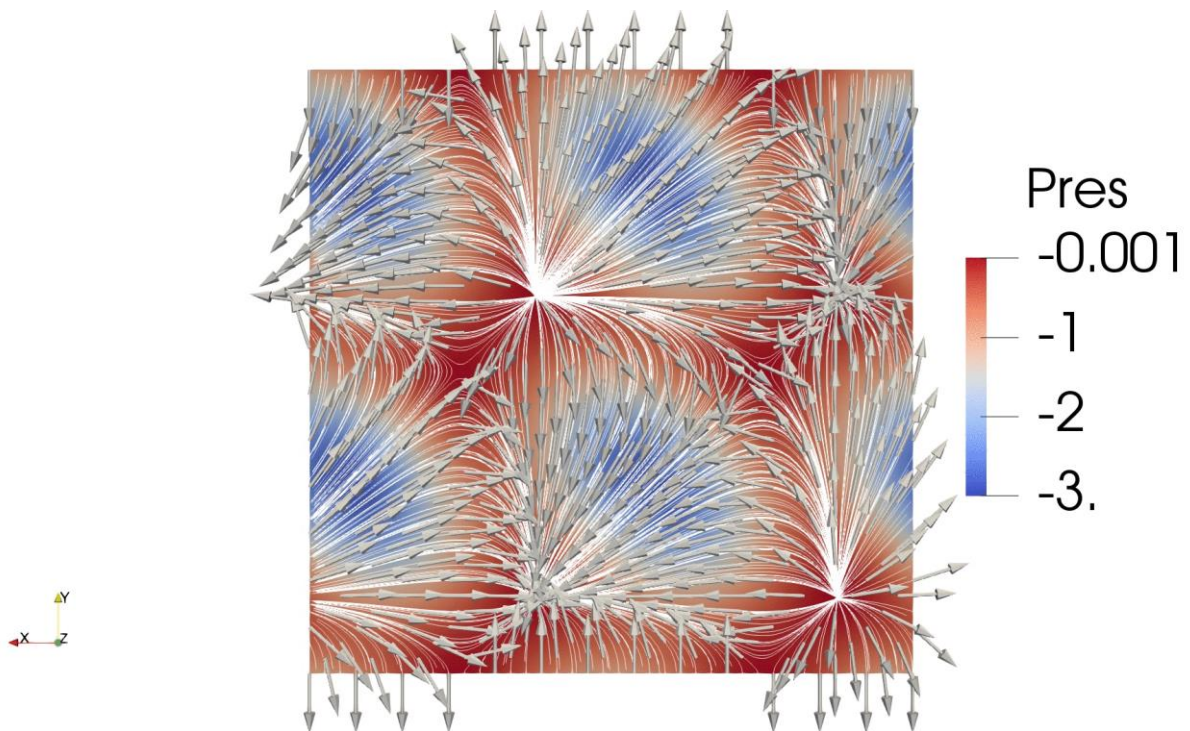


Рис. 9. Структура течения 2.2.2 в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точку $(\pi/4, \pi/4, \pi/4)$

3. Уравнения гидродинамики с примесями

Рассматривается следующая подмодель уравнений (1) – (5), состоящая из уравнений (2), (5), (6). На границе области течения выполняются условия (7) и

$$\frac{\partial n}{\partial \mathbf{N}} \Big|_{\partial D} = 0, \quad (8)$$

где \mathbf{N} – вектор нормали к границе ∂D .

Пусть также, как в предыдущем пункте, область D имеет периодическую структуру и состоит из кубов с ребром длиной 2π . Если начальное условие имеет вид

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \{\exp(\varepsilon x_3) \sin \lambda x_2; \exp(-\varepsilon x_3) \sin \lambda x_1; 0\},$$

$$n|_{t=0} = \{\exp(-\varepsilon x_3) \cos \lambda x_1 - \exp(\varepsilon x_3) \cos \lambda x_2\},$$

где $\lambda \neq 0$, то точное решение задачи (2), (5) – (8) имеет вид

$$\mathbf{u} = \exp\left(\left(\varepsilon^2 - \lambda^2\right)\mu t\right) \{\exp(\varepsilon x_3) \sin \lambda x_2; \exp(-\varepsilon x_3) \sin \lambda x_1; 0\},$$

$$p = \exp\left(2\mu t\left(\varepsilon^2 - \lambda^2\right)\right) \cos(\lambda x_1) \cos(\lambda x_2),$$

$$n = \exp\left(\chi t\left(\varepsilon^2 - \lambda^2\right)\right) (\exp(-\varepsilon x_3) \cos(\lambda x_1) - \exp(\varepsilon x_3) \cos(\lambda x_2)).$$

При этом, всюду в области D выполняется условие $(\mathbf{u} \cdot \nabla)n \equiv 0$, а решение задачи (2), (5) – (8) является двухпараметрическим и зависит от параметров ε и λ . В этом случае границей области течения ∂D являются прямые параллельные оси Ox_3 и проектирующиеся в точки плоскости x_1Ox_2 с координатами $x_1, x_2 = \frac{\pi n}{\lambda}, n \in \mathbb{Z}$.

При $\lambda = \mu$ получаем стационарное течение. Пусть $\lambda = \mu = 2$, тогда поле течения, соответствующее данному точному решению, в плоскостях параллельных x_1Ox_2 и проходящих с интервалом $\pi/4$ через точки, лежащие на оси Ox_3 , начиная с точки, имеющей координату $x_3 = -\pi/2$ и до точки с координатой $x_3 = \pi/2$, представлено на рис. 10, 11. На рис. 10 проиллюстрировано поле концентрации, а на рис. 11 поле давления. На рис. 12 проиллюстрировано поле давления в сечении плоскости параллельной x_2Ox_3 . Аналогично предыдущим двум рисункам здесь плоскость проходит через точки, лежащие на оси Ox_1 и имеющие координаты вида $(-\pi/2 + \pi n/4, 0, 0), n = 0, 1, \dots, 4$. Из рисунка 10 видно, что примесь располагается вдоль линий тока, при этом, линии тока существенно зависят от координаты x_3 . Рис. 11, 12 демонстрирует наличие фиксированной структуры у поля давления.

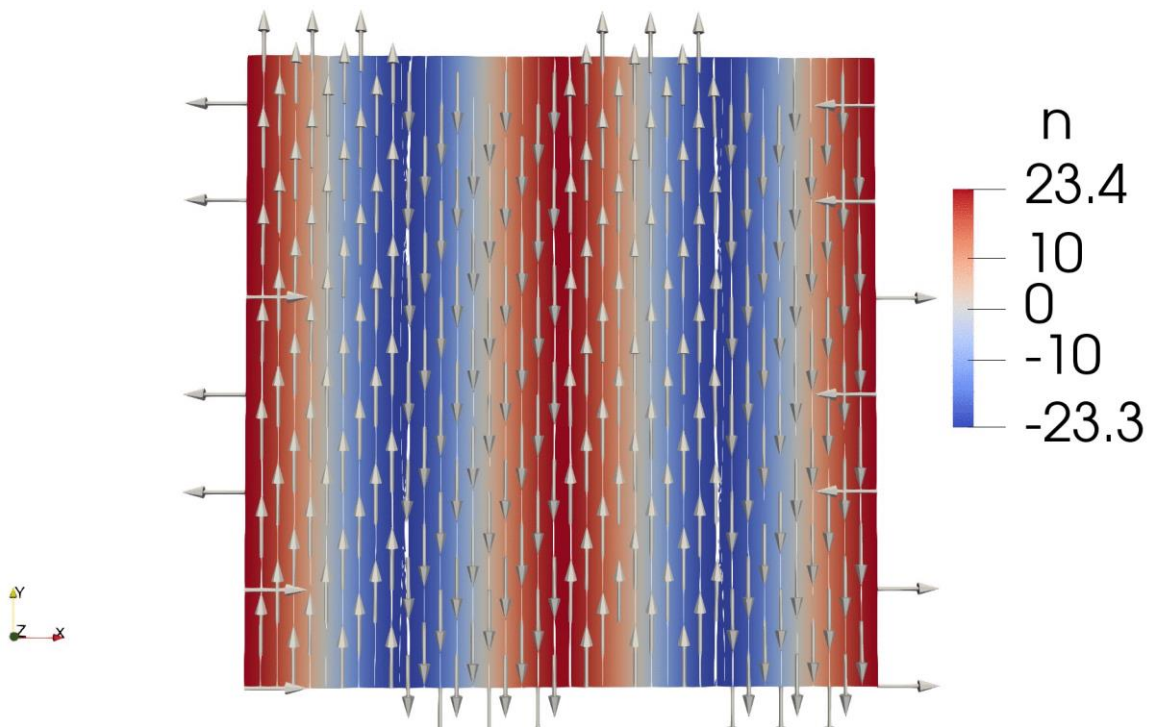


Рис.10. Структура течения \mathbf{z} в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точки вида $(0, 0, -\pi/2 + \pi n/4), n = 0, 1, \dots, 4$ и поле концентрации при $\lambda = \mu = 2$

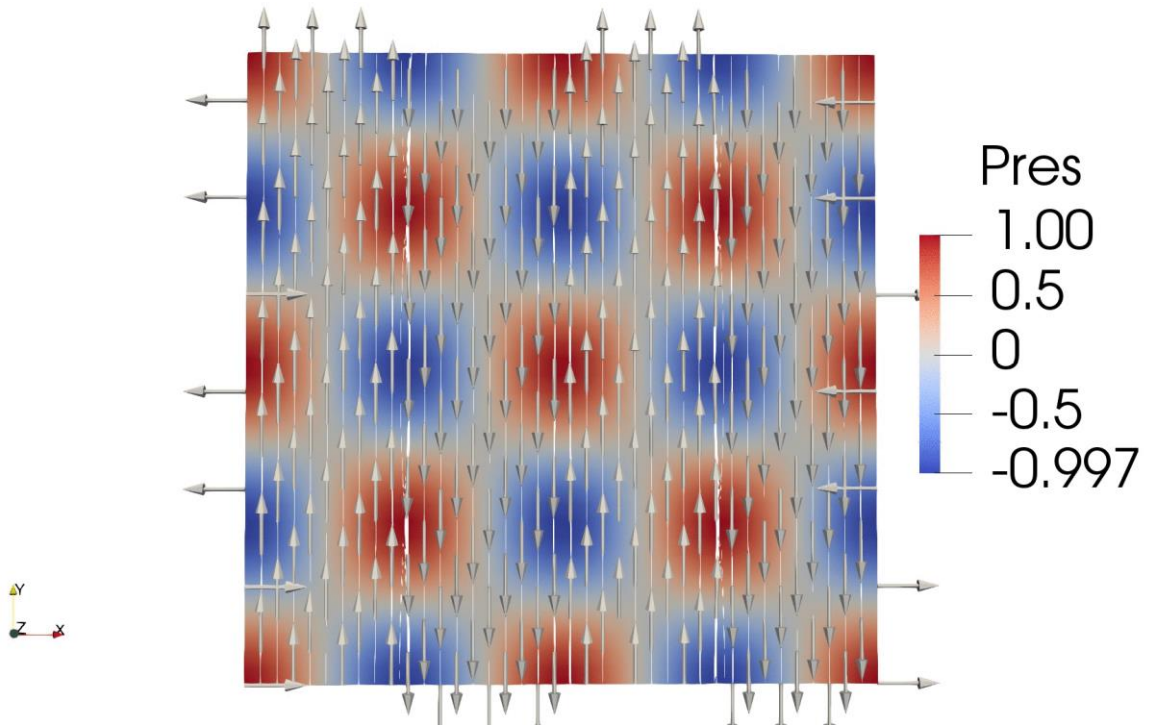


Рис.11. Структура течения z в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точки вида $(0, 0, -\pi/2 + \pi n/4)$, $n=0, 1, \dots, 4$ и поле давления при $\lambda=\mu=2$

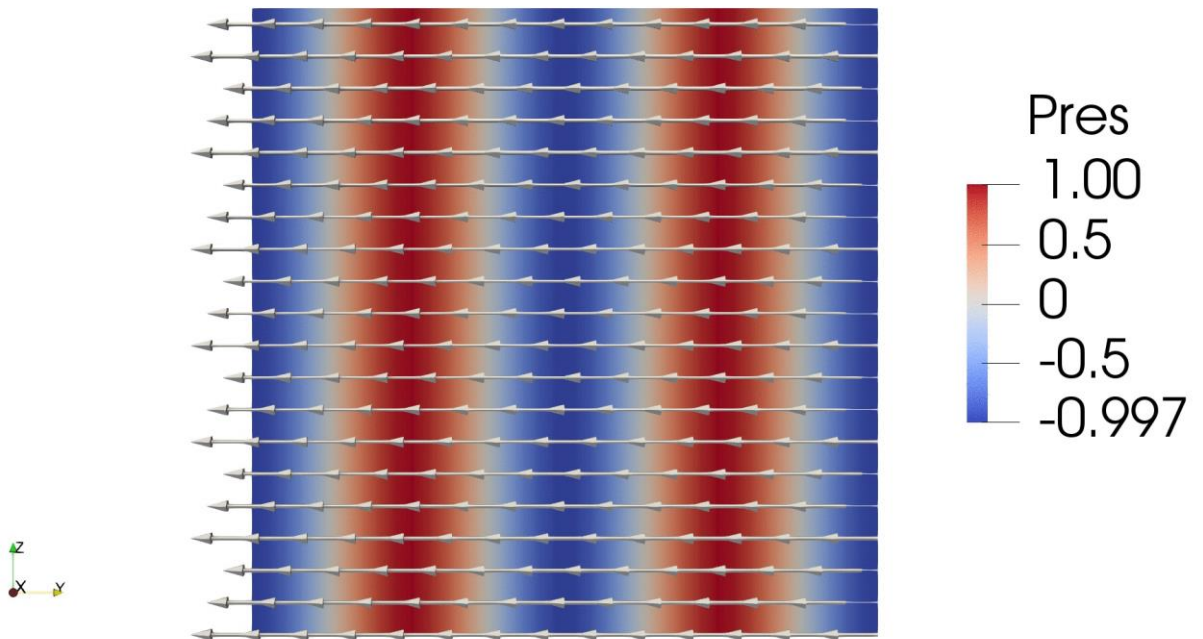


Рис.12. Структура течения z в плоскости параллельной x_2Ox_3 , проходящей через точки вида $(-\pi/2 + \pi n/4, 0, 0)$, $n=0, 1, \dots, 4$ и поле давления при $\lambda=\mu=2$

Пусть теперь $\lambda=2$, $\mu=1$. На рис. 13 проиллюстрирована зависимость структуры течения от координаты x_3 в плоскости ортогональной Ox_3 , при этом, x_3 последовательно принимает значения $-\pi/2, 0, \pi/2$. Из рис. 13 следует, что линии тока обладают структурой, которая существенно зависит от координаты x_3 , примесь располагается вдоль этих линий. Рис. 14 иллюстрирует распределение примеси в плоскостях перпендикулярных

оси Ox_2 , при этом линии тока параллельны оси Ox_1 . Распределение примеси в плоскостях параллельных оси Ox_1 (рис. 15) зеркально симметрично распределению на рис. 14.

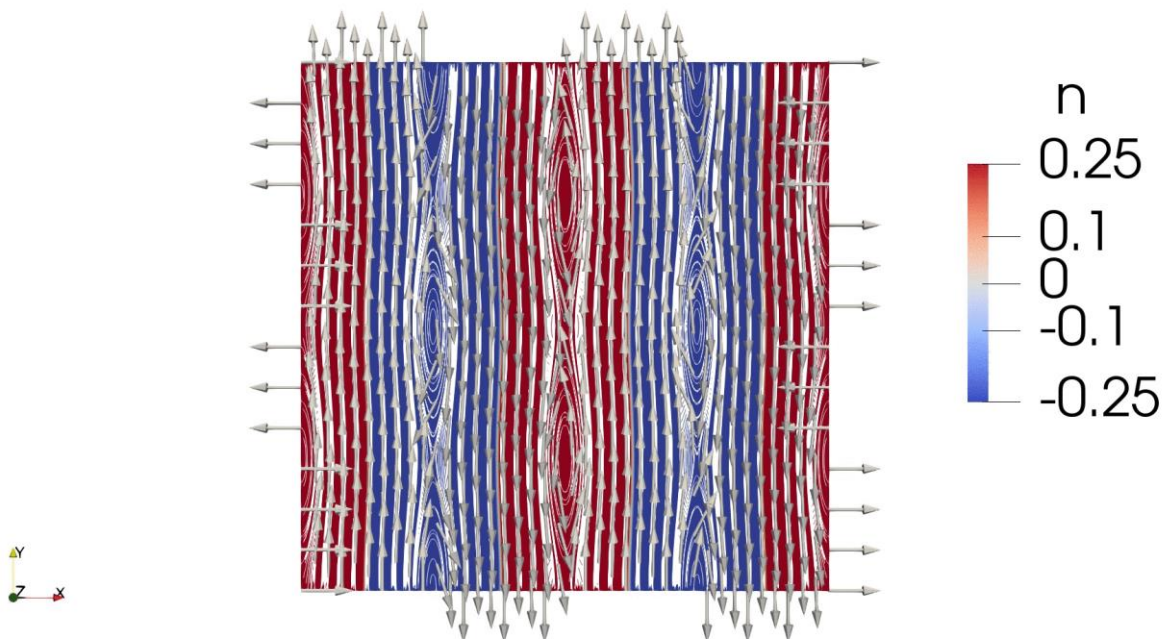


Рис.13. Структура течения 3 в плоскости параллельной x_2Ox_3 , проходящей через точки вида $(0, 0, -\pi/2 + \pi n/2)$, $n=0, 1, 2$ и поле концентрации при $\lambda=2, \mu=1$

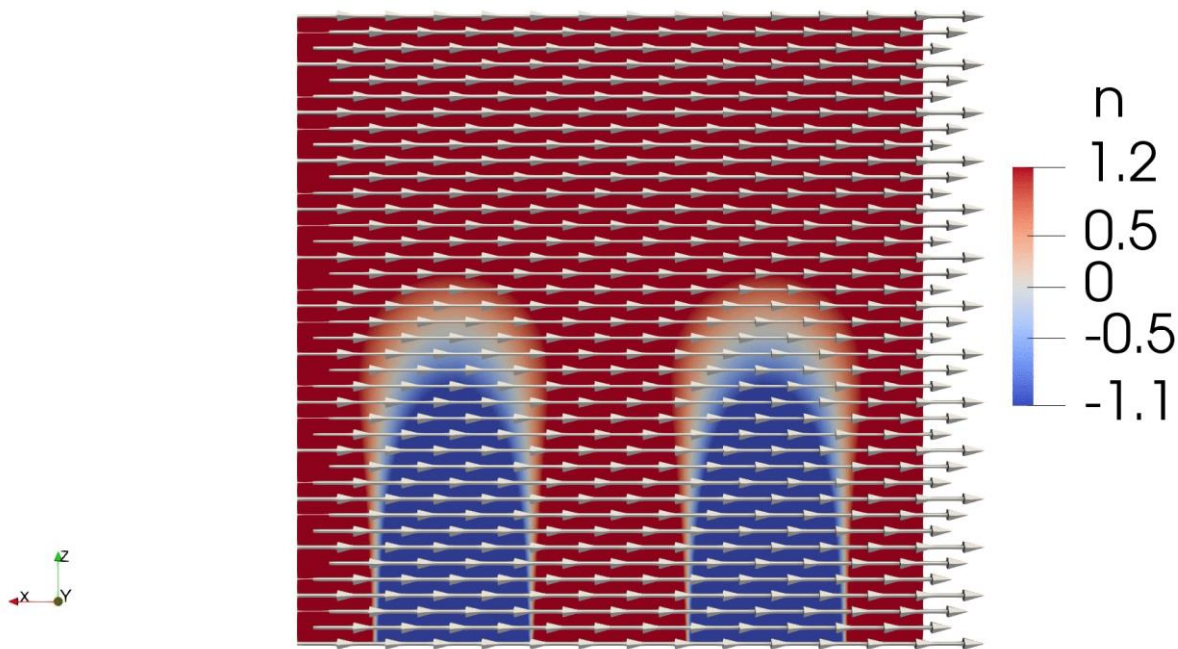


Рис.14. Структура течения 3 в плоскости параллельной x_1Ox_3 , проходящей через точки вида $(0, -\pi/2 + \pi n/2, 0)$, $n=0, 1, 2$ и поле концентрации при $\lambda=2, \mu=1$

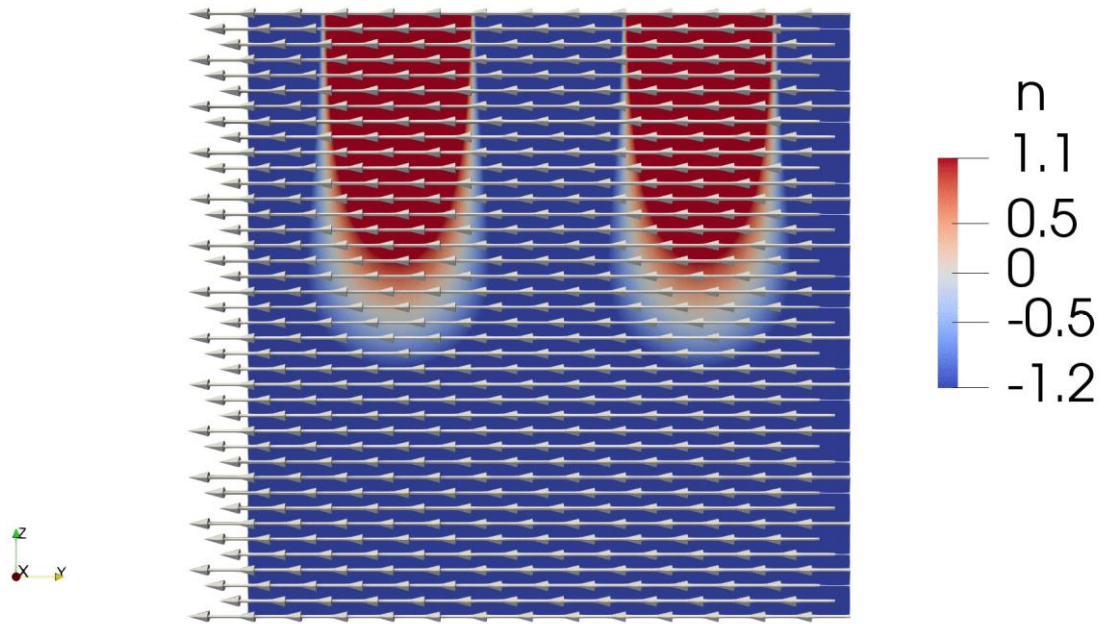


Рис.15. Структура течения \mathbf{z} в плоскости параллельной x_2Ox_3 , проходящей через точки вида $(-\pi/2 + \pi n/2, 0, 0)$, $n=0, 1, 2$ и поле концентрации при $\lambda=2, \mu=1$

При значении параметров $\lambda=1, \mu=2$ наблюдается аналогичная картина течения, что и на рис. 10 с той лишь разницей, что в представленном фрагменте области течение лишь раз успевает изменить свое направление на противоположное (рис. 16), а не три раза как на рис. 10. Отметим, что структура течения в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точку с координатами $(0, 0, -\pi/2)$ аналогично, представленному на рис. 16, однако, линии тока расположены не вдоль оси Ox_1 , а перпендикулярно к ним – вдоль оси Ox_2 , примесь также располагается вдоль линий тока. Рис. 17 иллюстрирует изменение структуры течения в плоскости параллельной x_1Ox_2 с увеличением значения координаты x_3 .

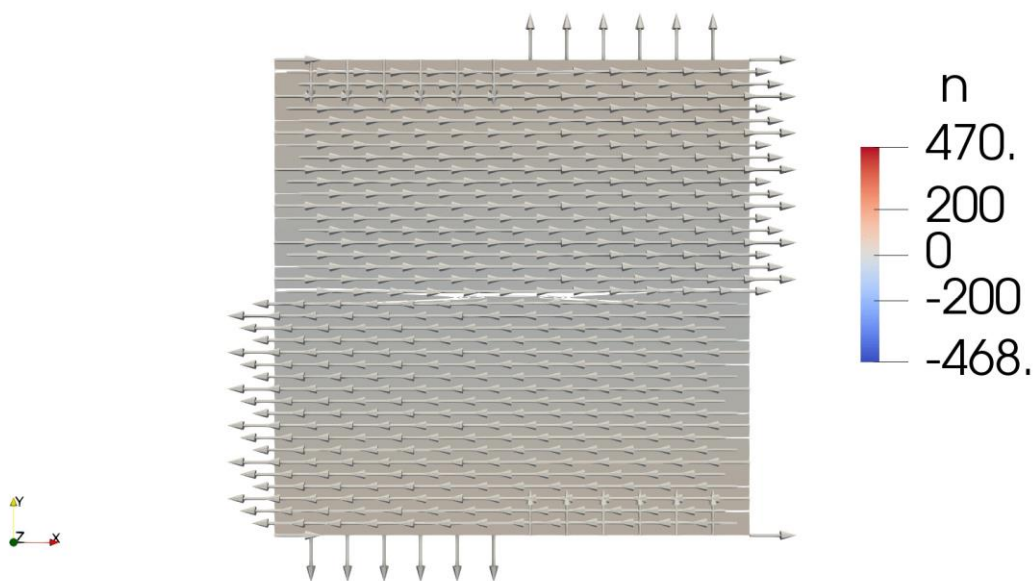


Рис.16. Структура течения \mathbf{z} в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точку $(0, 0, \pi/2)$ и поле концентрации при $\lambda=1, \mu=2$

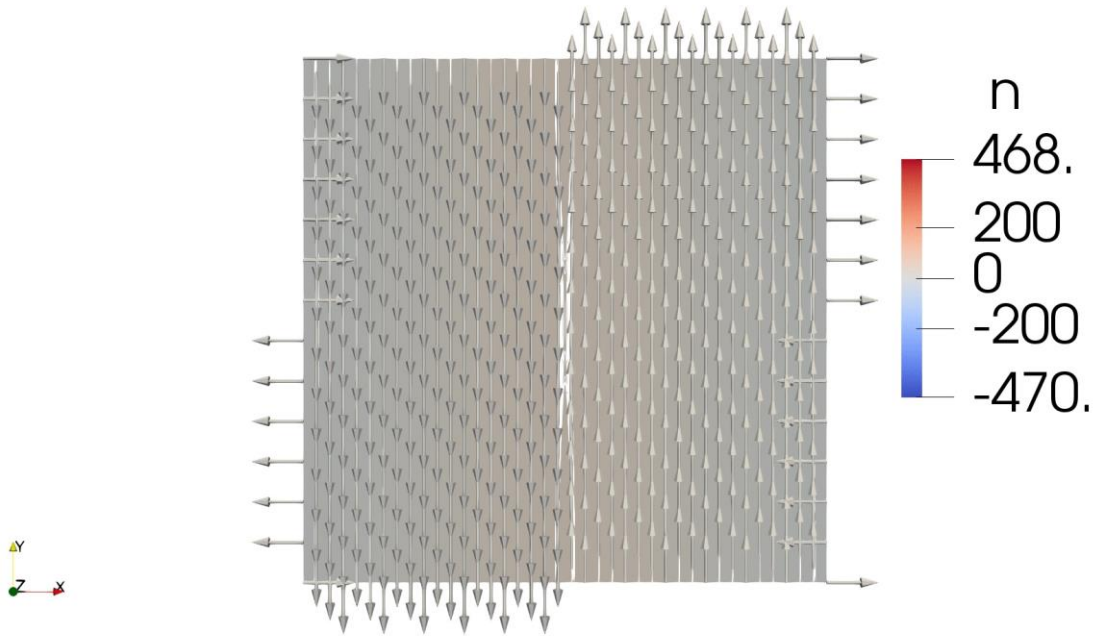


Рис.17. Структура течения z в плоскости параллельной x_1Ox_2 , проходящей через точки вида $(0, 0, -\pi/2 + \pi n/2)$, $n=0, 1, 2$ и поле концентрации при $\lambda=1, \mu=2$

4. Уравнения магнитной гидродинамики

Рассматривается система уравнений (1) – (4). Предполагается, что на границе области течения выполняется условие непротекания и нормальная составляющая вектора скорости, также как вектора напряженности магнитного поля, равна нулю на границе области, т. е.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{N})|_{\partial D} = (\mathbf{H}, \mathbf{N})|_{\partial D} = 0. \quad (9)$$

Граничные условия в касательных направлениях к границе задаются сужением точного решения, приведенного ниже, на эту подобласть. В качестве области течения D рассматривается шар радиуса R . Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \{-x_3 \sin x_2; x_3 \sin x_1; x_1 \sin x_2 - x_2 \sin x_1\}, \quad \mathbf{H}|_{t=0} = 2\sqrt{\pi} \mathbf{u}|_{t=0}.$$

Точное решение задачи (1) – (4), удовлетворяющее заданным начальным и граничным условиям имеет вид

$$\mathbf{u} = \exp(-\mu t) \{-x_3 \sin x_2; x_3 \sin x_1; x_1 \sin x_2 - x_2 \sin x_1\},$$

$$\mathbf{H} = 2\sqrt{\pi} \mathbf{u}, \quad p = -\frac{\mathbf{u}^2}{2}.$$

На рис. 18 проиллюстрирована структура течения, соответствующая данному точному решению, в шаре радиуса 5 с течением времени. Из рисунка видно, что течение на сфере разбивается на ячейки, имеющие в отличие от ранее рассмотренных течений, разную форму и размеры. С уменьшением радиуса шара ячейки на полюсах занимают все большую площадь сферы, доходя почти до экватора и соответственно ячейки, располагающиеся вдоль меридианов на рис. 18, уменьшаются и вытягиваются вдоль экватора.

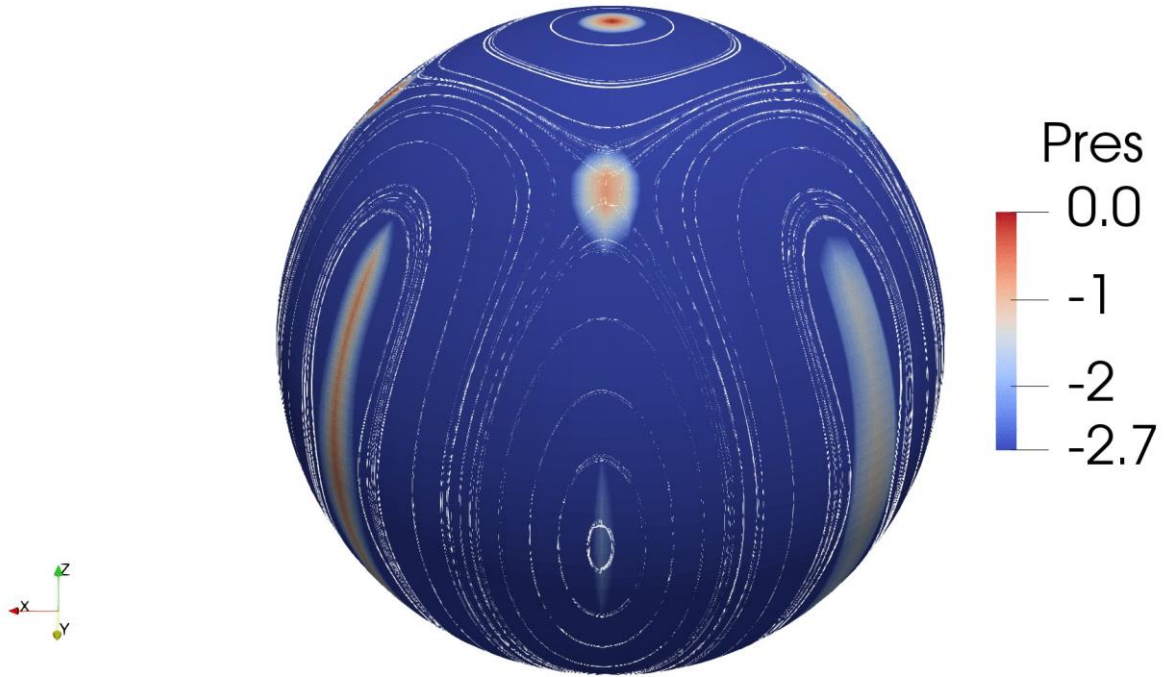


Рис.18. Структура течения 4 в шаре радиуса 5 и поле давления

5. Уравнения магнитной гидродинамики с примесями

Здесь рассматривается вся модель (1) – (5), удовлетворяющая условиям (9). Как и в предыдущем параграфе, граничные условия в касательных направлениях к границе задаются сужением точного решения, приведенного ниже, на эту подобласть. А в качестве области течения D рассматривается шар радиуса R . Поле концентрации во всех приведенных ниже решениях предполагается стационарным, удовлетворяющим условиям $(\mathbf{u} \cdot \nabla)n \equiv 0$ и $\Delta n \equiv 0$.

5.1 Стационарные решения

Далее приводятся несколько стационарных решений уравнений (1) – (5).

1. Если на границе области D задано условие (13) для поля концентрации, то решением задачи (1) – (5) является

$$\mathbf{u} = \{-x_3 x_2; x_3 x_1; 0\}, \quad \mathbf{H} = 2\sqrt{\pi} \mathbf{u}, \quad p = -\frac{\mathbf{u}^2}{2}, \quad (10)$$

$$n = \ln \frac{\sqrt{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + 1} - 1}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + 1} + 1}.$$

Отметим, что если ввести сферическую систему координат в области D , то последнее выражение для поля концентрации примет вид

$$n = \ln \frac{1 - |\cos \theta|}{1 + |\cos \theta|},$$

где θ – угол между радиус-вектором точки области D и положительным направлением оси Ox_3 . На рис. 19, 20 представлены линии тока в шаре радиуса 5 и поля давления и концентрации соответственно. С изменением радиуса качественно картина полей дав-

ления и концентрации не меняется, меняется только количественные значения в каждой точке.

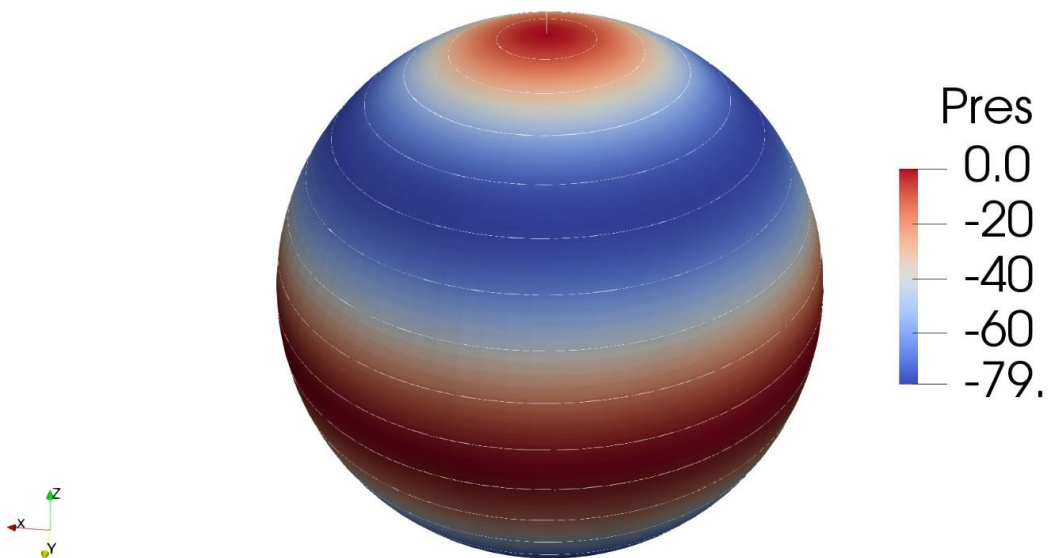


Рис.19. Структура течения 5.1.1 в шаре радиуса 5 и поле давления

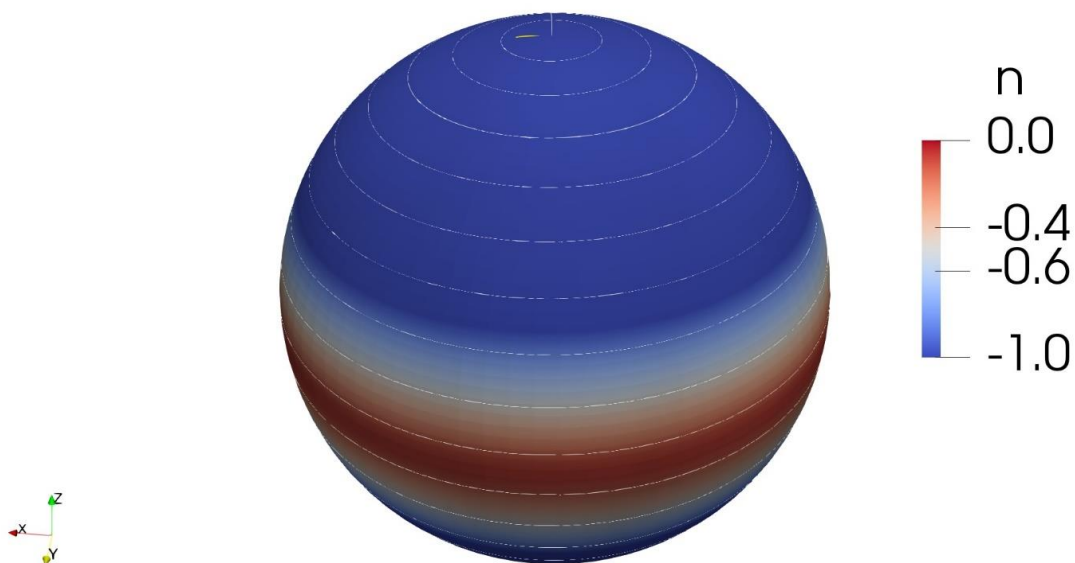


Рис.20. Структура течения 5.1.1 в шаре радиуса 5 и поле концентрации

2. Другое стационарное решение уравнений (1) – (5) имеет вид

$$\mathbf{u} = \{x_2 - x_3; x_3 - x_1; x_1 - x_2\}, \quad \mathbf{H} = 2\sqrt{\pi}\mathbf{u}, \quad p = -\frac{\mathbf{u}^2}{2},$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}. \quad (11)$$

В этом случае на границе также задается поток поля концентрации, однако здесь он уже отличен от нуля. На рис. 21 представлена структура течения и поле давления, соот-

ведствующее данному точному решению. Поле концентрации (11) на сфере является постоянной величиной.

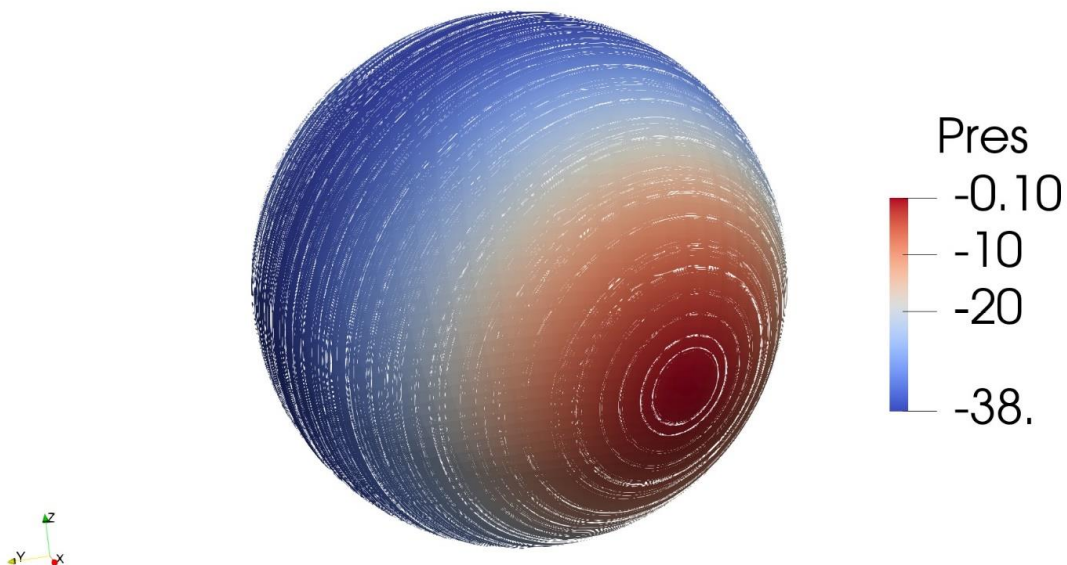


Рис.21. Структура течения 5.1.2 в шаре радиуса 5 и поле давления

3. Следующее решение задачи (1) – (5) можно получить из двух предыдущих и оно состоит из выражений (10) и выражения (11) сдвинутого по оси Ox_3

$$n = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - p)^2}}.$$

На рис. 22 проиллюстрировано поле течения параллельное экватору и поток примеси в нем, располагающийся по меридианам, при значении параметра $p=6$, в шаре радиуса 5. При этом, наглядно продемонстрировано выполнение условия $(\mathbf{u} \cdot \nabla)n \equiv 0$.

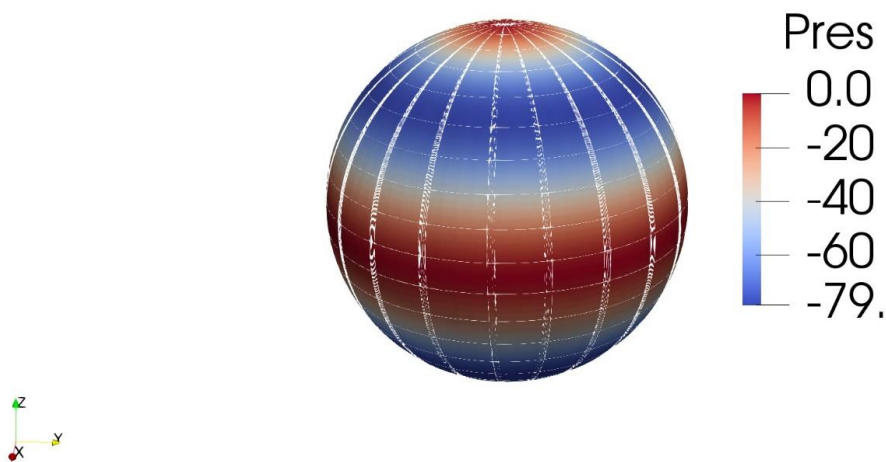


Рис.22. Структура течения 5.1.3 (вдоль экватора) и поток примеси в ней (по меридианам) в шаре радиуса 5 и поле давления

5.2 Нестационарное решение

Если для модели (1) – (5), рассматриваемой в шаре радиуса R , задать начальные условия

$$n = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad \mathbf{H}|_{t=0} = 2\sqrt{\pi} \mathbf{u}|_{t=0},$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_2 - 3x_2x_3 - x_3 + x_2 \sin x_3 - 2x_3 \cos x_2 + 4x_2 \sin \sqrt{2}x_3 - x_3 \sin \sqrt{2}x_2 \\ -x_1 + 3x_1x_3 + x_3 + -x_1 \sin x_3 + 3x_3 \sin x_1 + x_3 \cos \sqrt{2}x_1 - 4x_1 \sin \sqrt{2}x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_1 \cos x_2 - 3x_2 \sin x_1 + x_1 \sin \sqrt{2}x_2 - x_2 \cos \sqrt{2}x_1 \end{pmatrix},$$

то решением задачи (1) – (5), удовлетворяющее условиям (9) имеет вид

$$n = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad \mathbf{H} = 2\sqrt{\pi} \mathbf{u}, \quad p = -\frac{\mathbf{u}^2}{2},$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_2 - 3x_2x_3 - x_3 \\ -x_1 + 3x_1x_3 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + e^{-\mu t} \begin{pmatrix} x_2 \sin x_3 - 2x_3 \cos x_2 \\ -x_1 \sin x_3 + 3x_3 \sin x_1 \\ 2x_1 \cos x_2 - 3x_2 \sin x_1 \end{pmatrix} + e^{-2\mu t} \begin{pmatrix} 4x_2 \sin \sqrt{2}x_3 - x_3 \sin \sqrt{2}x_2 \\ x_3 \cos \sqrt{2}x_1 - 4x_1 \sin \sqrt{2}x_3 \\ x_1 \sin \sqrt{2}x_2 - x_2 \cos \sqrt{2}x_1 \end{pmatrix}.$$

На рис. 23 проиллюстрировано изменение со временем линий тока и поля давления для рассматриваемого точного решения уравнений МГД. Линии тока возле полюсов располагаются по параллелям, в то время как линии тока, находящиеся ближе к экватору, располагаются вдоль областей, заметно изменяющихся с течением времени.

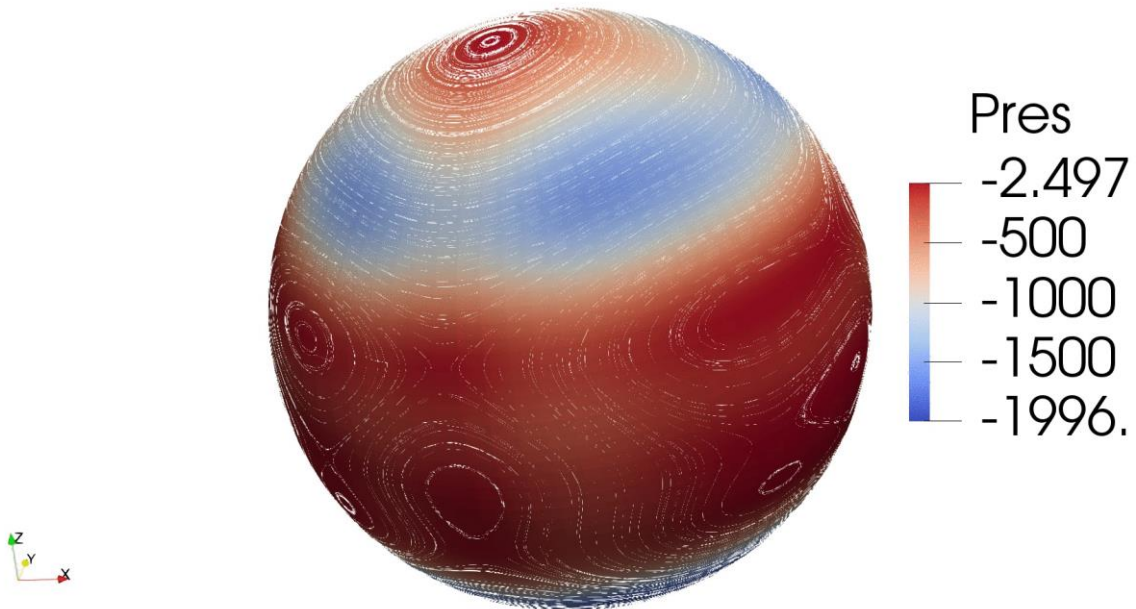


Рис.23. Структура течения 5.2 в шаре радиуса 5 и поле давления

Отметим, что условие (9) выполняется для сферы произвольного радиуса. Таким образом, рассмотренные течения жидкости в параграфах 4, 5 стратифицируются на слои – сферы фиксированного радиуса. Решения, представленные в параграфе 5.1 пунктах 1 и 2, являются частными случаями решения 5.3 и соответствуют линейной и нелинейной части первого слагаемого вектора скорости \mathbf{u} .

6. Заключение

В работе рассматриваются точные решения уравнений МГД, дополненных уравнением конвекции-диффузии, описывающих течение вязкой проводящей несжимаемой жидкости с учетом наличия примесей в поле течения. Найденные точные решения могут быть использованы для верификации результатов моделирования таких течений. Кроме того, в работе представлены классы течений, соответствующие течению жидкости в пористой среде. Понимание и анализ структуры таких сложных течений не возможны без наглядного их представления. С задачей визуализации поля течения позволяют справиться различные, доступные на данный момент, программные средства. При написании этой статьи использовался ParaView (<https://www.paraview.org>).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 18-47-860005, 18-47-860004.

Список литературы

1. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебн. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – 4-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. 656 С.
2. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. – Изд. 2-е. испр. и доп. – М.: Логос. 2005.– 328 с.
3. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Управление параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // ДАН. 2015. Т. 463. № 2. С. 149-151.
4. В. А. Галкин, А. О. Дубовик, А. А. Епифанов. Приближенные методы для уравнений несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017, том 57, № 2, с. 275–284.
5. Вольпин С.Г. Юдин В.А., Кац Р.М., Афанаскин И.В., Галкин В.А. Применение суперкомпьютерных технологий- ключ к решению проблем повышения нефтеотдачи на месторождениях России // В сб.: СПб науч. форум. VIII встреча лауреатов нобелевской премии. СПб. 2013. С. 90-92.
6. Галич Н.Е. Тепловая неустойчивость и пробой движущихся вязких жидкостей в электрическом поле и при поглощении света// Журнал технической физики, 1989, т. 59, вып. 7, с 10-17.
7. Алтоиз Б.А., Савин Н.В., Шатагина Е.А. Влияние тепловыделения в микропрослойке жидкости при измерении ее вязкости // ЖТФ. 2014. Т. 84. В. 5. С. 21-27.
8. Куштанова Г.Г. Физика геосферы. Казань. Из-во КазГУ. 2004. 44 С.
9. Семенов Н.Н. Цепные реакции. М.: Гомхимтехиздат. 1934.
10. Шестаков В.М. Гидрогеодинамика. М.: Из-во МГУ. 1995. 368 С.
11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Разностная схема для решения задач гидродинамики пир больших сеточных числа Пекле // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Е. 11. № 5. С. 833–848.
12. Семенякина А.А. Параллельное решение задач диффузии-конвекции на основе схем повышенного порядка точности // В сбр. Суперкомпьютерные технологии (СКТ-2016). Материалы 4-й Всероссийской научно-технической конференции. В 2-ч томах. 2016. С. 281–285.
13. Клещенко А.В., Сорокина В.В., Чикин А.Л., Чикина Л.Г. Численное моделирование процесса распределения речных наносов дона в таганрогском заливе с помощью математической модели // Экология. Экономика. Информатика. Серия: системный анализ и моделирование экономических и экологических систем. 2019. Т. 1. № 4. С. 217–222.
14. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Никитина А.В., Чистякова А.Е. Математическое моделирование гидродинамики процессов переноса солей и тепла в мелководных водоемах // Сбр. Всероссийская научная конф. с межд. участием «Земля и космос» к столетию академика РАН К.Я. Кондратьева. Сборник статей. 2020. С. 307–311.

15. Бетелин В.Б., Галкин В.А., Дубовик А.О. Точные решения системы Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в случае задач, связанных с нефтегазовой отраслью // Докл. Академии Наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 13–16.
16. Бетелин В. Б., Галкин В. А., Гореликов А. В. Алгоритм типа предиктор–корректор для численного решения уравнения индукции в задачах магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // ДАН. 2015. Т. 464. № 5. с. 525–528.

Development of the human face tracking algorithm based on the optical flow application

V. A. Galkin^{1,A,B}, A.O. Dubovik^{2,A,B}

^A Surgut Branch of SRISA

^B Surgut State University

¹ ORCID: 0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru

² ORCID: 0000-0002-4158-9646, alldubovik@gmail.com

Abstract

A system of equations for the magnetic hydrodynamics (MHD), supplemented by the convection-diffusion equation describing the flow of a viscous conducting incompressible fluid taking into account the presence of impurities in it is considered in this paper. Modern scientific visualization software, such as ParaView, provide a wide range of possibilities for visualization and, therefore, a clearer presentation of the structure of such flows, especially in three-dimensional case. This opportunity allows to analyze, draw conclusions, note the features of the investigated fluid flows, and was actively used in the preparation of this publication.

The MHD model is an active field of research for many scientists, however, most of the works are devoted exclusively to numerical modeling, and very little attention has been paid to exact solutions for these problems. The article discusses classes of exact solutions of the MHD equations and the associated convection-diffusion equation. The exact solutions found can be used for verification of developed numerical algorithms for solving the discussed problems. Moreover, the exact solutions found describe fluid flows in a porous medium and are related to the development of a core simulator that will allow to simulate intraplast effects. It is associated with the creation of a domestic technology "digital field" and the tasks of controlling the parameters of incompressible liquids. For the oil and gas industry, a solution of this class of task will allow to perform optimization effects of various types (mechanical, electromagnetic, thermal, etc.) in order to increase the oil recovery factor.

Keywords: magnetohydrodynamics, exact solutions, fluid flow visualization, convection-diffusion.

References

1. Landau L.D. Lifshits E. M. Teoreticheskaya fizika: Uchebn. posob.: Dlya vuzov. V 10 t. T. VIII. Elektrodinamika sploshnykh sred [Theoretical physics: Textbook. manual: For universities. In 10 volumes, V. VIII. Continuous media electrodynamics.] – 4th ed., Stereo. Moscow: FIZMATLIT. 2005. 656 p. [in Russian]
2. Kulikovskiy A.G., Lyubimov G.A. Magnitnaya gidrodinamika [Magnetic hydrodynamics]. – Ed. 2nd. rev. and add. – Moscow: Logos. 2005.– 328 p. [in Russian]
3. Betelin V.B., Galkin V.A. Control of Incompressible Fluid Parameters in the case of Time_Varying Flow Geometry // Doklady Mathematics. 2015. V. 92. No 1. p. 511–513.
4. V. A. Galkin, A. O. Dubovik, A. A. Epifanov. Approximate Methods for Equations of incompressible fluid // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017, V. 57, no. 2, p. 272-280.
5. Volpin S.G. Yudin V.A., Kats R.M., Afanaskin I.V., Galkin V.A. Primeneniye superkomp'yuternykh tekhnologiy- klyuch k resheniyu problem povysheniya nefteotdachi na mestorozhdeniyakh Rossii [Application supercomputer technologies are the key to solving the problems of enhanced oil recovery at deposits of Russia] // In collection: SPb scien-

- tific. forum. VIII meeting of Nobel laureates awards. Sankt-Petersburg. 2013.S. 90–92. [in Russian]
6. Galich N.E. Teplovaya neustoychivost' i proboy dvizhushchikhsya vyazkikh zhidkostey v elektricheskom pole i pri pogloshchenii sveta [Thermal instability and breakdown of moving viscous fluids in electric field and absorption of light] // Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. 1989. vol. 59. no. 7. p. 10–17. [in Russian]
 7. Altoiz B.A., Savin N.V., Shatagina E.A. Vliyaniye teplovydeleniya v mikroprosloyke zhidkosti pri izmerenii yeye vyazkosti [Influence of heat dissipation in micro-layer liquid when measuring its viscosity] // Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. 2014.Vol. 84.V. 5.P. 21-27. [in Russian]
 8. Kushtanova G.G. Fizika geosfery [Physics of the geosphere]. Kazan. From Kazan State University. 2004. 44 p. [in Russian]
 9. Semenov N.N. Tsepnyye reaktsii [Chain reactions]. Moscow: Gomkhimtekhizdat. 1934. [in Russian]
 10. Shestakov V.M. Hydrogeodynamica [Hydrogeodynamics]. Moscow: Moscow State University. 1995. 368 p. [in Russian]
 11. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Raznostnaya skhema dlya resheniya zadach gidrodinamiki pir bol'shikh setochnykh chislakh Pekle [Difference scheme for solving problems hydrodynamics of large grid Peclet numbers] // Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye. 2019. V. 11.No. 5. p. 833-848. [in Russian]
 12. Semenyakina A.A. Parallel'noye resheniye zadach diffuzii-konvektiv na osnove skhem povyshennogo poryadka tochnosti [Parallel solution of diffusion-convection problems based on schemes increased order of accuracy] // In collection Superkomp'yuternyye tekhnologii (SKT-2016). Materials of the 4th All-Russian Scientific and Technical Conference. In 2 volumes. 2016.S. 281-285. [in Russian]
 13. Kleshenkov A.V., Sorokina V.V., Chikin A.L., Chikina L.G. Chislennoye modelirovaniye protsessa raspredeleniya rechnykh nanosov dona v taganrogskom zalive s pomoshch'yu matematicheskoy modeli [Numerical simulation the process of distribution of river sediments of the Don in the Taganrog Bay using mathematical model] // Ekologiya. Ekonomika. Informatika. Seriya: sistemnyy analiz i modelirovaniye ekonomicheskikh i ekologicheskikh sistem. 2019. V. 1.No. 4.P. 217-222. [in Russian]
 14. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Chistyakova A.E. Matematicheskoye modelirovaniye gidrodinamiki protsessov perenosa soley i tepla v melkovodnykh vodoyemakh [Mathematical modeling the hydrodynamics of salt and heat transfer processes in shallow water reservoirs] // Collection of All-Russian Scientific Conf. from int. participation of "Zemlya i kosmos" to centenary of Academician of RAS K. Ya. Kondratyev. Digest of articles. 2020. p. 307–311. [in Russian]
 15. Betelin V.B., Galkin V.A., Dubovik A.O. Exact Solutions of Incompressible Navier–Stokes Equations in the Case of Oil and Gas Industrial Problems // Doklady Mathematics. 2020.Vol. 102. No 3. p. 456–459.
 16. Betelin V.B., Galkin V.A., Gorelikov A.V. Predictor–Corrector Algorithm for the Numerical Solution of the Magnetic Field Equation in Viscous Incompressible MHD Problems // Doklady Mathematics. 2015. V. 92. No. 2. p. 618–621.