

Алгебраические методы раскраски кубических графов

С.В. Курапов^{1,А}, М.В. Давидовский^{2,В}, А.В. Толок^{3,С}

^А Запорожский национальный университет

^В Запорожский институт последипломного педагогического образования

^С Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

¹ ORCID: 0000-0003-4563-7227, lilil5050@rambler.ru

² ORCID: 0000-0002-9472-3351, m.davidovsky@gmail.com

³ ORCID: 0000-0002-7257-9029, a.tolok@stankin.ru

Аннотация

В работе рассмотрены алгебраические методы раскраски кубических графов, основанные на теореме Тэйта. Для описания раскраски плоского кубического графа применяется групповое преобразование Клейна четвертого порядка. Для перехода к раскраске графа производится раскраска ребер базисных циклов. Рассмотрен математический аппарат для описания топологического рисунка графа. На основе раскраски ребер рассмотрены вопросы формирования цветных дисков и математическое описание операции ротации цветных дисков с последующей переокраской ребер. Показано, что операция ротации цветных дисков может быть описана как кольцевая сумма циклов. Для однозначного описания представления цветных дисков посредством базисных циклов введено понятие вложимости цветных дисков. Приведены примеры применения операции ротации цветных дисков. В статье установлена связь между системой индуцированных циклов порождаемой вращением вершин графа и раскраской 2-факторов кубического графа. Показано, что кольцевая сумма всех циклов входящих в цветные 2-факторы графа есть пустое множество. Также в статье рассмотрены вопросы раскраски непланарных кубических графов. Показана связь между базисными циклами и ободом в непланарном кубическом графе и кольцевой суммой цветных 2-факторов. Указана зависимость между цветным вращением вершин плоского кубического графа и замкнутыми маршрутами Хивуда.

Ключевые слова: граф, топологический рисунок графа, вращение вершин графа, циклы, планарность, цветные диски, цветные 2-факторы, операция ротации цветных дисков.

1. Введение

В работе [3] была доказана теорема о существовании цветного диска проходящего по сцепленным ребрам в базисном простом цикле плоского правильно раскрашенного кубического графа \mathbf{H} . На основании доказанной теоремы было показано, что задачу о четырех красках можно представить как её следствие. Введение новой операции – ротации цветного диска – позволило производить переокраску ребер в плоском раскрашенном кубическом графе и построить визуальный алгоритм раскраски. Представленный метод позволяет рекурсивно производить раскраску в три цвета ребер последующего плоского кубического графа \mathbf{H} с n вершинами на основе предыдущего раскрашенного плоского кубического графа с $n-2$ вершинами.

С точки зрения раскраски между максимальным плоским графом \mathbf{G}' и двойственным к нему плоским кубическим графом \mathbf{H} существует связь, устанавливаемая следующей теоремой Тэйта.

Теорема 1. (Тэйт) [4]. Пусть \mathbf{H} — плоский однородный кубический граф без перешейков; необходимое и достаточное условие возможности такого раскрашивания граней графа четырьмя цветами, при котором ни какие две смежные грани не окрашиваются в одинаковый цвет, состоит в том, чтобы хроматический класс графа \mathbf{H} был равен трем.

Таким образом, раскраска ребер и граней плоского кубического графа адекватна раскраске вершин и ребер в максимально плоском графе \mathbf{G}' . Поэтому удобно рассматривать только процесс раскраски плоского кубического графа.

Теорема Тейта не только устанавливает связь между раскраской вершин максимально плоского графа и раскраской ребер двойственного к нему плоского кубического графа, но и указывает на применение для раскраски графа операции преобразования группы Клейна четвертого порядка [2]. Данное преобразование позволяет связать в единое целое раскраску граней плоского кубического графа \mathbf{H} в четыре цвета и раскраску ребер в три цвета.

+	0	1	2	3	
W	W	R	B	G	(1)
R	R	W	G	B	
B	B	G	W	R	
G	G	B	R	W	

Дальнейшее развитие методов раскраски ребер и граней в плоском кубическом графе показало наличие тесной связи между раскраской и топологическим рисунком плоского графа. В данной работе будем рассматривать алгебраические раскраски в плоском кубическом графе

2. Математические структуры для описания топологического рисунка графа

Граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, как правило, задается множеством вершин \mathbf{V} , множеством ребер \mathbf{E} и трехместным предикатом \mathbf{P} в виде матрицы смежностей или матрицы инцидентностей [1,6] без описания рисунка графа. Необходимым понятием для топологического описания плоского рисунка графа \mathbf{G} является понятие вращения вершин графа, введенное Г. Рингелем [5].

Определение 1. Для данного графа \mathbf{G} вращение вершины A — это ориентированный циклический порядок (или циклическая перестановка) всех ребер, инцидентных вершине A .

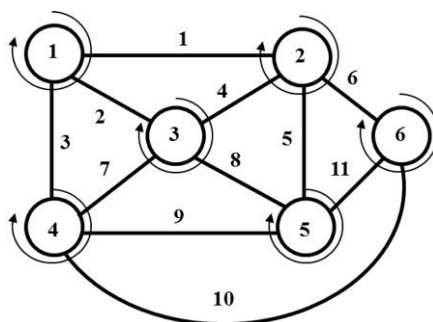


Рис. 1. Граф \mathbf{G} и его вращение вершин.

Определение 2. Вращение вершин графа σ — совокупность вращений всех его вершин.

Вращение всех вершин графа будем представлять в виде диаграмм, и обозначать σ . Например, для нашего рисунка графа (рис. 1) диаграмма вращения вершин имеет вид:

ский класс равный трем будем называть раскрашенным плоским кубическим графом **H**. Например, кубический граф представленный на рис. 2 является раскрашенным кубическим графом **H**. Здесь белый цвет будем обозначать буквой **W** или цифрой 0, а на рисунках графа ребра данного цвета будем представлять штрихпунктирной линией. Красный цвет будем обозначать буквой **R** или цифрой 1, а на рисунках графа ребра данного цвета будем представлять сплошной линией. Синий цвет будем обозначать буквой **B** или цифрой 2, а на рисунках графа ребра данного цвета будем представлять точечной линией. Зеленый цвет будем обозначать буквой **G** или цифрой 3, а на рисунках графа ребра данного цвета будем представлять пунктирной линией. Согласно теореме Тэйта раскраска ребер индуцирует раскраску граней плоского кубического графа **H**, а раскраска граней, в свою очередь, индуцирует раскраску ребер.



Рис. 3. Обозначение цветных линий

Определение 4. В раскрашенном плоском кубическом графе цветной диск – это замкнутый маршрут четной длины с ребрами только двух цветов.

Таким образом, красный цветной диск состоит только из синих и зеленых ребер. Зеленый цветной диск состоит только из синих и красных ребер. Синий цветной диск состоит только из зеленых и красных ребер.

Процесс построения цветного диска можно рассматривать как последовательность подключения цветных ребер двух цветов

$$D = \langle v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{p-1}, e_{p-1}, v_p, e_p, v_1 \rangle \quad (2)$$

где p – длина цветного диска.

Будем обозначать цветной диск латинской буквой D и именем цвета. Например, красный цветной диск DR плоского кубического графа **H** на рис. 2 можно представить в виде кортежа:

$$DR = \langle v_1, e_2, v_5, e_{10}, v_{10}, e_{12}, v_6, e_{11}, v_7, e_{13}, v_8, e_{14}, v_9, e_9, v_4, e_6, v_3, e_4, v_2, e_1, v_1 \rangle;$$

или с учетом цвета ребра, указанного в квадратных скобках:

$$DR = \langle e_2[2], e_{10}[3], e_{12}[2], e_{11}[3], e_{13}[2], e_{14}[3], e_9[2], e_6[3], e_4[2], e_1[3] \rangle.$$

Цветной диск в плоском кубическом графе **H** можно представлять в виде кольцевого сложения циклов [6]. Причем кольцевое сложение осуществляется в порядке соприкосновения двух циклов, имеющих общее ребро цвета диска. Например, раскрашенные индуцированные циклы графа **H** на рис. 2,

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{e_2[2], e_3[1], e_{10}[3], e_{12}[2]\}; & c_2 &= \{e_1[3], e_3[1], e_5[1], e_{11}[3]\}; \\
 c_3 &= \{e_4[2], e_5[1], e_7[1], e_{13}[2]\}; & c_4 &= \{e_6[3], e_7[1], e_9[2], e_{14}[3]\}; \\
 c_5 &= \{e_8[1], e_9[2], e_{10}[3], e_{15}[1]\}; & c_6 &= \{e_{11}[3], e_{12}[2], e_{13}[2], e_{14}[3], e_{15}[1]\}; \\
 c_0 &= \{e_1[3], e_2[2], e_4[2], e_6[3], e_8[1]\}.
 \end{aligned}$$

образуют следующие цветные 2-факторы:

$$\begin{aligned}
 R_c &= c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 = \{e_2[2], e_3[1], e_{10}[3], e_{12}[2]\} \oplus \{e_1[3], e_3[1], e_5[1], e_{11}[3]\} \oplus \\
 &\oplus \{e_4[2], e_5[1], e_7[1], e_{13}[2]\} \oplus \{e_6[3], e_7[1], e_9[2], e_{14}[3]\} = \\
 &= \{e_2[2], e_{10}[3], e_{12}[2], e_1[3], e_5[1], e_{11}[3]\} \oplus \{e_4[2], e_5[1], e_7[1], e_{13}[2]\} \oplus \\
 &\oplus \{e_6[3], e_7[1], e_9[2], e_{14}[3]\} = \\
 &= \{e_2[2], e_{10}[3], e_{12}[2], e_1[3], e_{11}[3], e_4[2], e_7[1], e_{13}[2]\} \oplus \{e_6[3], e_7[1], e_9[2], e_{14}[3]\} = \\
 &= \{e_2[2], e_{10}[3], e_{12}[2], e_1[3], e_{11}[3], e_4[2], e_{13}[2], e_6[3], e_9[2], e_{14}[3]\} = \\
 &= \langle e_2[2], e_{10}[3], e_{12}[2], e_{11}[3], e_{13}[2], e_{14}[3], e_9[2], e_6[3], e_4[2], e_1[3] \rangle;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_c &= (c_4 \oplus c_5) \oplus (c_2) = (\{e_6[3], e_7[1], e_9[2], e_{14}[3]\} \oplus \{e_8[1], e_9[2], e_{10}[3], e_{15}[1]\}) \oplus \\ &\oplus (\{e_1[3], e_3[1], e_5[1], e_{11}[3]\}) = (\{e_6[3], e_7[1], e_{14}[3], e_8[1], e_{10}[3], e_{15}[1]\}) \oplus \\ &\oplus (\{e_1[3], e_3[1], e_5[1], e_{11}[3]\}) = (\langle e_6[3], e_7[1], e_{14}[3], e_{15}[1], e_{10}[3], e_8[1] \rangle, \\ &(\langle e_1[3], e_5[1], e_{11}[3], e_3[1] \rangle)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_c &= (c_1 \oplus c_5) \oplus (c_3) = (\{e_2[2], e_3[1], e_{10}[3], e_{12}[2]\} \oplus \{e_8[1], e_9[2], e_{10}[3], e_{15}[1]\}) \oplus \\ &\oplus (\{e_4[2], e_5[1], e_7[1], e_{13}[2]\}) = (\{e_2[2], e_3[1], e_{12}[2], e_8[1], e_9[2], e_{15}[1]\}) \oplus \\ &\oplus (\{e_4[2], e_5[1], e_7[1], e_{13}[2]\}) = (\langle e_2[2], e_3[1], e_{12}[2], e_{15}[1], e_9[2], e_8[1] \rangle, \\ &(\langle e_{13}[2], e_5[1], e_4[2], e_7[1] \rangle)). \end{aligned}$$

Так как в раскраске плоского графа дважды участвуют все ребра (согласно теореме Маклейна), то из построения следует:

Следствие 1. *Кольцевая сумма всех ребер входящих в цветные диски есть пустое множество*

$$\sum_{i=1}^m e_i = \emptyset \quad (3)$$

Особое место занимают *белые циклы*, не входящие в выражение (2), где ребра могут быть раскрашены тремя цветами. Для нашего примера:

$$W_c = c_6 \oplus c_0 = (\{e_{11}[3], e_{12}[2], e_{13}[2], e_{14}[3], e_{15}[1]\}) \oplus (\{e_1[3], e_2[2], e_4[2], e_6[3], e_8[1]\}).$$

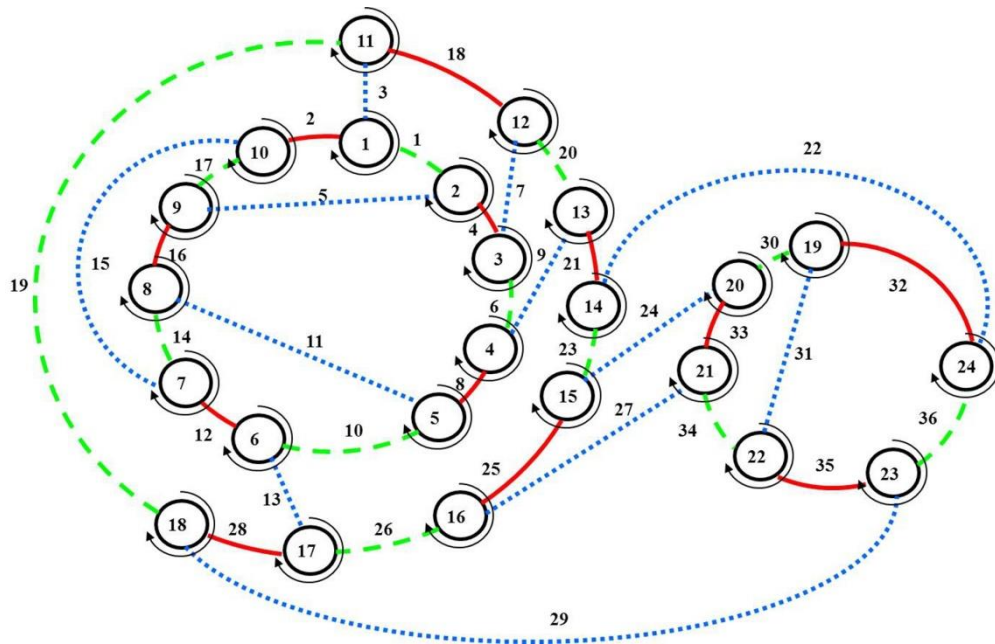


Рис. 4. Рисунок раскрашенного плоского кубического графа H_2 .

Если образование цветных дисков как замкнутый маршрут ребер формируется однозначно, то формирование цветных дисков циклами имеет свои специфические черты. Для этого рассмотрим следующий рисунок раскрашенного графа H_2 (рис. 4)

Для данного кубического графа H_2 выберем базисные циклы:

$$c_1 = \{e_1[3], e_2[1], e_5[2], e_{17}[3]\}, c_2 = \{e_4[1], e_5[2], e_6[3], e_8[1], e_{11}[3], e_{16}[1]\},$$

$$c_3 = \{e_{10}[3], e_{11}[2], e_{12}[1], e_{14}[3]\}, c_4 = \{e_{14}[3], e_{15}[2], e_{16}[1], e_{17}[3]\},$$

$$c_5 = \{e_2[1], e_3[2], e_{12}[1], e_{13}[2], e_{15}[2], e_{19}[3], e_{28}[1]\},$$

$$c_6 = \{e_8[1], e_9[2], e_{10}[3], e_{13}[2], e_{21}[1], e_{23}[3], e_{25}[1], e_{26}[3]\}, c_7 = \{e_6[3], e_7[2], e_9[2], e_{20}[3]\},$$

$$c_8 = \{e_1[3], e_3[2], e_4[1], e_7[2], e_{18}[1]\}, c_9 = \{e_{22}[2], e_{23}[3], e_{24}[2], e_{30}[3], e_{32}[1]\},$$

$$c_{10} = \{e_{24}[2], e_{25}[1], e_{27}[2], e_{33}[1]\}, c_{11} = \{e_{26}[3], e_{27}[2], e_{28}[1], e_{29}[2], e_{34}[3], e_{35}[1]\},$$

$$c_{12} = \{e_{30}[3], e_{31}[2], e_{33}[1], e_{34}[3]\}, c_{13} = \{e_{31}[2], e_{32}[1], e_{35}[1], e_{36}[3]\}.$$

Формируем обод графа $c_0 = \{e_{18}[1], e_{19}[3], e_{20}[3], e_{21}[1], e_{22}[2], e_{29}[2], e_{36}[3]\}$.

Рассмотрим случай формирования цветного диска DB, состоящего из следующих циклов:

$$\begin{aligned} DB &= c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_8 = \{e_{14}[3], e_{15}[2], e_{16}[1], e_{17}[3]\} \oplus \\ &\oplus \{e_2[1], e_3[2], e_{12}[1], e_{13}[2], e_{15}[2], e_{19}[3], e_{28}[1]\} \oplus \\ &\oplus \{e_8[1], e_9[2], e_{10}[3], e_{13}[2], e_{21}[1], e_{23}[3], e_{25}[1], e_{26}[3]\} \oplus \\ &\oplus \{e_6[3], e_7[2], e_9[2], e_{20}[3]\} \oplus \{e_1[3], e_3[2], e_4[1], e_7[2], e_{18}[1]\} = \\ &= \{e_{14}, e_{16}, e_{17}, e_2, e_{12}, e_8, e_{10}, e_6, e_1, e_4, e_{19}, e_{28}, e_{21}, e_{23}, e_{25}, e_{26}, e_{20}, e_{18}\} = \\ &= \langle e_{14}[3], e_{16}[1], e_{17}[3], e_2[1], e_1[3], e_4[1], e_6[3], e_8[1], e_{10}[3], e_{12}[1] \rangle \oplus \\ &\langle e_{19}[3], e_{28}[1], e_{26}[3], e_{25}[1], e_{23}[3], e_{21}[1], e_{20}[3], e_{18}[1] \rangle. \end{aligned}$$

Как видно, данная совокупность циклов формирует два одноцветных диска. Для однозначного формирования цветного диска следует добавить циклы c_1, c_2, c_3 , которые в свою очередь также однозначно формируют цветной диск

Для графа, представленного на рис. 6, цветные диски до ротации имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} DB_1 &= c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = \langle e_{14}[3], e_{16}[1], e_{17}[3], e_2[1], e_1[3], e_4[1], e_6[3], e_8[1], e_{10}[3], e_{12}[1] \rangle; \\ DB_2 &= c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = \\ &= \langle e_{19}[3], e_{28}[1], e_{26}[3], e_{25}[1], e_{23}[3], e_{21}[1], e_{20}[3], e_{18}[1] \rangle. \\ DB_3 &= c_{12} \oplus c_{13} = \langle e_{30}[3], e_{32}[1], e_{36}[3], e_{35}[1], e_{34}[3], e_{33}[1] \rangle; \end{aligned}$$

Таким образом, возникает понятие *вложимости* цветных дисков. Рассматривая циклы данного графа H_2 , можно сказать, что циклы цветного диска DB_1 *вложимы* в цветной диск DB_2 .

Построим все цветные диски кубического графа H_2 (рис. 4).

$$\begin{aligned} DR_1 &= c_1 \oplus c_5 \oplus c_3 \oplus c_{11} \oplus c_{13} \oplus c_9 = \\ &= \langle e_{19}[3], e_{29}[2], e_{36}[3], e_{22}[2], e_{23}[3], e_{24}[2], e_{30}[3], e_{31}[2], e_{34}[3], e_{27}[2], e_{26}[3], e_{13}[2], e_{10}[3], \\ &e_{11}[2], e_{14}[3], e_{15}[2], e_{17}[3], e_5[2], e_1[3], e_3[2] \rangle; \\ DR_2 &= c_7 = \langle e_7[2], e_{20}[3], e_9[2], e_6[3] \rangle; \\ DG_1 &= c_{10} = \langle e_{24}[2], e_{33}[1], e_{27}[2], e_{25}[1] \rangle; \\ DG_2 &= c_1 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_6 \oplus c_8 \oplus c_9 \oplus c_{10} \oplus c_{11} \oplus c_{12} = \\ &= \langle e_{18}[1], e_3[2], e_2[1], e_{15}[2], e_{12}[1], e_{13}[2], e_{28}[1], e_{29}[2], e_{35}[1], e_{31}[2], e_{32}[1], e_{22}[2], e_{21}[1], \\ &e_9[2], e_8[1], e_{11}[2], e_{16}[1], e_5[2], e_4[1], e_7[2] \rangle; \end{aligned}$$

Как видим, диск DG_2 вложим в диск DG_1 .

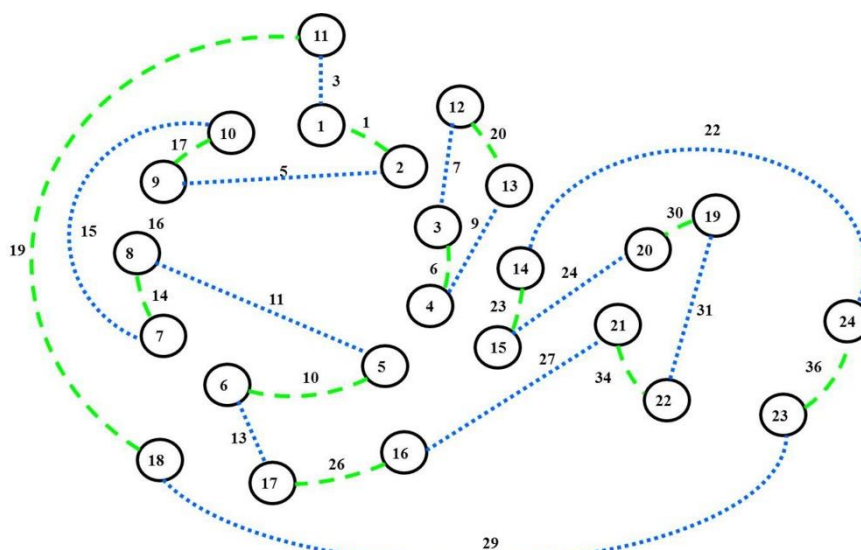


Рис. 5. Красный 2-фактор до ротации.

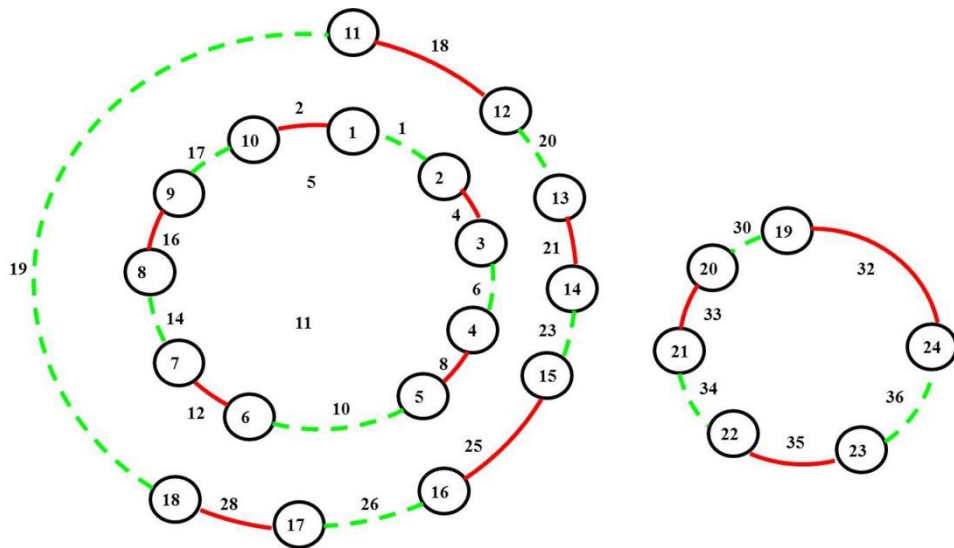


Рис. 6. Синий 2-фактор до ротации.

$$W_c = c_0 = \langle e_{18}[1], e_{19}[3], e_{20}[3], e_{21}[1], e_{22}[2], e_{29}[2], e_{36}[3] \rangle;$$

Цветные 2-факторы образуются как кольцевая сумма соответствующих цветных дисков. Например, для графа H_2 красные диски представлены на рис. 5.

$$R_c = DR_1 \oplus DR_2 = (c_1 \oplus c_5 \oplus c_3 \oplus c_{11} \oplus c_{13} \oplus c_9) \oplus (c_7) = \\ = \langle e_{19}[3], e_{29}[2], e_{36}[3], e_{22}[2], e_{23}[3], e_{24}[2], e_{30}[3], e_{31}[2], e_{34}[3], e_{27}[2], e_{26}[3], e_{13}[2], e_{10}[3], e_{11}[2], \\ e_{14}[3], e_{15}[2], e_{17}[3], e_5[2], e_1[3], e_3[2] \rangle \oplus \langle e_7[2], e_{20}[3], e_9[2], e_6[3] \rangle;$$

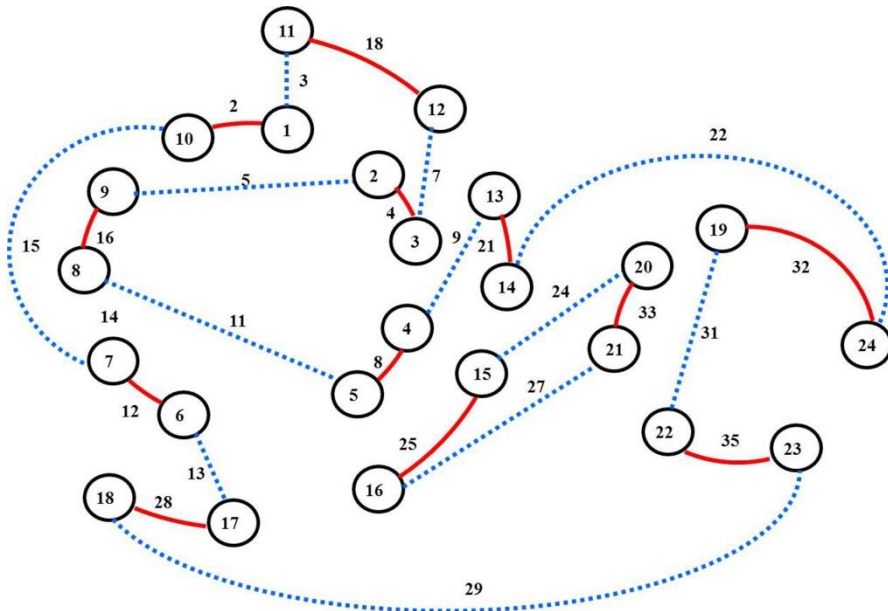


Рис. 7. Зеленый 2-фактор до ротации

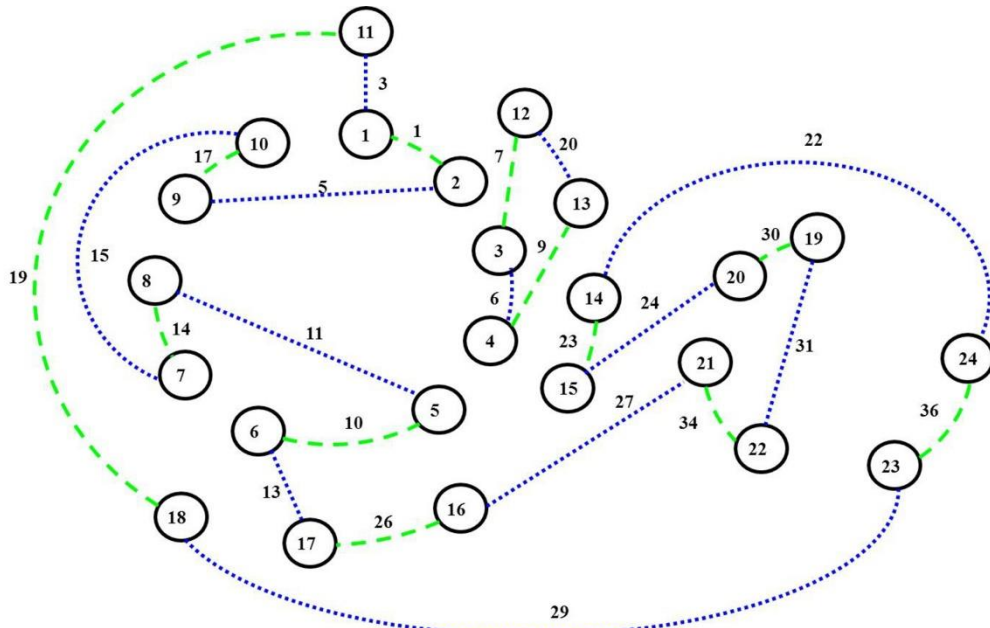


Рис. 8. Красный 2-фактор после ротации.

Синие диски представлены на рис. 6.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_c &= \mathbf{DB}_1 \oplus \mathbf{DB}_2 \oplus \mathbf{DB}_3 = (\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2 \oplus \mathbf{c}_3) \oplus (\mathbf{c}_4 \oplus \mathbf{c}_5 \oplus \mathbf{c}_6 \oplus \mathbf{c}_7 \oplus \mathbf{c}_8 \oplus \mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2 \oplus \mathbf{c}_3) \oplus \\
 &\oplus (\mathbf{c}_{12} \oplus \mathbf{c}_{13}) = (\mathbf{c}_4 \oplus \mathbf{c}_5 \oplus \mathbf{c}_6 \oplus \mathbf{c}_7 \oplus \mathbf{c}_8) \oplus (\mathbf{c}_{12} \oplus \mathbf{c}_{13}) = \\
 &= \langle \mathbf{e}_{14}[3], \mathbf{e}_{16}[1], \mathbf{e}_{17}[3], \mathbf{e}_2[1], \mathbf{e}_1[3], \mathbf{e}_4[1], \mathbf{e}_6[3], \mathbf{e}_8[1], \mathbf{e}_{10}[3], \mathbf{e}_{12}[1] \rangle \oplus \\
 &\oplus \langle \mathbf{e}_{18}[1], \mathbf{e}_{20}[3], \mathbf{e}_{21}[1], \mathbf{e}_{23}[3], \mathbf{e}_{25}[1], \mathbf{e}_{26}[3], \mathbf{e}_{28}[1], \mathbf{e}_{19}[3] \rangle \oplus \\
 &\oplus \langle \mathbf{e}_{30}[3], \mathbf{e}_{32}[1], \mathbf{e}_{36}[3], \mathbf{e}_{35}[1], \mathbf{e}_{34}[3], \mathbf{e}_{33}[1] \rangle;
 \end{aligned}$$

Зеленные диски представлены на рис. 7.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_c &= \mathbf{DG}_1 \oplus \mathbf{DG}_2 = (\mathbf{c}_8 \oplus \mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_4 \oplus \mathbf{c}_3 \oplus \mathbf{c}_6 \oplus \mathbf{c}_{11} \oplus \mathbf{c}_{12} \oplus \mathbf{c}_9 \oplus \mathbf{c}_{10}) \oplus (\mathbf{c}_{10}) = \\
 &= \mathbf{c}_8 \oplus \mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_4 \oplus \mathbf{c}_3 \oplus \mathbf{c}_6 \oplus \mathbf{c}_{11} \oplus \mathbf{c}_{12} \oplus \mathbf{c}_9 = \\
 &= \langle \mathbf{e}_2[1], \mathbf{e}_{15}[2], \mathbf{e}_{12}[1], \mathbf{e}_{13}[2], \mathbf{e}_{28}[1], \mathbf{e}_{29}[2], \mathbf{e}_{35}[1], \mathbf{e}_{31}[2], \mathbf{e}_{32}[1], \mathbf{e}_{22}[2], \mathbf{e}_{21}[1], \mathbf{e}_9[2], \mathbf{e}_8[1], \mathbf{e}_{11}[2], \\
 &\mathbf{e}_{16}[1], \mathbf{e}_5[2], \mathbf{e}_4[1], \mathbf{e}_7[2], \mathbf{e}_{18}[1], \mathbf{e}_3[2] \rangle \oplus \langle \mathbf{e}_{24}[2], \mathbf{e}_{33}[1], \mathbf{e}_{27}[2], \mathbf{e}_{25}[1] \rangle.
 \end{aligned}$$

Кольцевая сумма всех цветных дисков одного цвета образует 2-фактор того же цвета. Например, на рис. 5-7 представлены цветные 2-факторы.

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{DR}_1 \oplus \mathbf{DR}_2; \quad \mathbf{B}_c = \mathbf{DB}_1 \oplus \mathbf{DB}_2 \oplus \mathbf{DB}_3; \quad \mathbf{G}_c = \mathbf{DG}_1 \oplus \mathbf{DG}_2$$

Из построения следует:

Следствие 2. Кольцевая сумма всех циклов участвующих в формировании цветных 2-факторов есть пустое множество,

$$\mathbf{R}_c \oplus \mathbf{B}_c \oplus \mathbf{G}_c = \emptyset \quad (4)$$

Следующее выражение устанавливает связь между цветными 2-факторами и базисными циклами плоского кубического графа:

$$2 \left(\sum_{i=0}^{m-n+1} \mathbf{c}_i \oplus \mathbf{c}_0 \right) = (\mathbf{R}_c \oplus \mathbf{B}_c \oplus \mathbf{G}_c) \oplus 2\mathbf{W}_c \quad (5)$$

Следствие 3. Удвоенная сумма базисных циклов топологического рисунка и обода равна кольцевой сумме циклов цветных 2-факторов плюс удвоенная сумма белых циклов.

4. Ротация цветных дисков

Под *ротацией* цветного гамильтонова диска будем понимать изменение последовательности раскраски ребер данного диска. Ротация диска приводит к изменению других цветных дисков.

Будем проводить ротацию цветного диска DR_2 . При ротации меняются только цвета ребер e_6, e_7, e_9, e_{20} , принадлежащих цветному диску DR_2 . Цвета других ребер не меняются. Для определения новых последовательностей в цветных дисках, присоединим циклы, принадлежащие диску DR_2 , к другим цветным 2-факторам.

$$\begin{aligned} R_c &= DR_1 \oplus DR_2 = (c_1 \oplus c_5 \oplus c_3 \oplus c_{11} \oplus c_{13} \oplus c_9) \oplus (c_7); \\ V_c &= DB_1 \oplus DB_2 \oplus DB_3 = (c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_8) \oplus (c_{12} \oplus c_{13}) \oplus (c_7); \\ G_c &= DG_1 \oplus DG_2 = (c_8 \oplus c_1 \oplus c_4 \oplus c_3 \oplus c_6 \oplus c_{11} \oplus c_{12} \oplus c_9) \oplus (c_7); \end{aligned}$$

В результате получим раскраску красных цветных дисков (рис. 8):

$$\begin{aligned} R_c &= (c_1 \oplus c_5 \oplus c_3 \oplus c_{11} \oplus c_{13} \oplus c_9) \oplus (c_7) = \\ &= \langle e_{19}[3], e_{29}[2], e_{36}[3], e_{22}[2], e_{23}[3], e_{24}[2], e_{30}[3], e_{31}[2], e_{34}[3], e_{27}[2], e_{26}[3], e_{13}[2], e_{10}[3], e_{11}[2], \\ &e_{14}[3], e_{15}[2], e_{17}[3], e_5[2], e_1[3], e_3[2] \rangle \oplus \langle e_7[3], e_{20}[2], e_9[3], e_6[2] \rangle; \end{aligned}$$

синих цветных дисков (рис. 9):

$$\begin{aligned} V_c &= (c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_8) \oplus (c_{12} \oplus c_{13}) \oplus (c_7) = \\ &= \{e_{14}[3], e_{15}[2], e_{16}[1], e_{17}[3]\} \oplus \{e_2[1], e_3[2], e_{12}[1], e_{13}[2], e_{15}[2], e_{19}[3], e_{28}[1]\} \oplus \\ &\{e_8[1], e_9[3], e_{10}[3], e_{13}[2], e_{21}[1], e_{23}[3], e_{25}[1], e_{26}[3]\} \oplus \{e_6[2], e_7[3], e_9[3], e_{20}[2]\} \oplus \\ &\oplus \{e_1[3], e_3[2], e_4[1], e_7[3], e_{18}[1]\} \oplus \{e_{30}[3], e_{31}[2], e_{33}[1], e_{34}[3]\} \oplus \\ &\oplus \{e_{31}[2], e_{32}[1], e_{35}[1], e_{36}[3]\} \oplus \{e_6[2], e_7[3], e_9[3], e_{20}[2]\} = \\ &= \{e_{14}[3], e_{16}[1], e_{17}[3], e_2[1], e_{12}[1], e_{19}[3], e_{28}[1], e_8[1], e_{10}[3], e_{21}[1], e_{23}[3], e_{25}[1], e_{26}[3], e_1[3], \\ &e_4[1], e_7[3], e_{18}[1], e_{30}[3], e_{33}[1], e_{34}[3], e_{32}[1], e_{35}[1], e_{36}[3]\} = \\ &= \langle e_{14}[3], e_{16}[1], e_{17}[3], e_2[1], e_1[3], e_4[1], e_7[3], e_{18}[1], e_{19}[3], e_{28}[1], e_{26}[3], e_{25}[1], e_{23}[3], \\ &e_{21}[1], e_9[3], e_8[1], e_{10}[3], e_{12}[1] \rangle \oplus \langle e_{30}[3], e_{32}[1], e_{36}[3], e_{35}[1], e_{34}[3], e_{33}[1] \rangle; \end{aligned}$$

зеленых цветных дисков (рис. 10):

$$\begin{aligned} G_c &= (c_8 \oplus c_1 \oplus c_4 \oplus c_3 \oplus c_6 \oplus c_{11} \oplus c_{12} \oplus c_9) \oplus (c_7) = \{e_1[3], e_3[2], e_4[1], e_7[3], e_{18}[1]\} \oplus \\ &\{e_1[3], e_2[1], e_5[2], e_{17}[3]\} \oplus \{e_{14}[3], e_{15}[2], e_{16}[1], e_{17}[3]\} \oplus \{e_{10}[3], e_{11}[2], e_{12}[1], e_{14}[3]\} \oplus \\ &\oplus \{e_8[1], e_9[3], e_{10}[3], e_{13}[2], e_{21}[1], e_{23}[3], e_{25}[1], e_{26}[3]\} \oplus \\ &\oplus \{e_{26}[3], e_{27}[2], e_{28}[1], e_{29}[2], e_{34}[3], e_{35}[1]\} \oplus \\ &\oplus \{e_{30}[3], e_{31}[2], e_{33}[1], e_{34}[3]\} \oplus \{e_{22}[2], e_{23}[3], e_{24}[2], e_{30}[3], e_{32}[1]\} \oplus \\ &\oplus \{e_6[2], e_7[3], e_9[3], e_{20}[2]\} = \{e_{15}[2], e_{16}[1], e_{11}[2], e_{12}[1], e_8[1], e_{13}[2], e_{21}[1], e_{25}[1], e_{27}[2], \\ &e_{28}[1], e_{29}[2], e_{35}[1], e_{31}[2], e_{33}[1], e_{22}[2], e_{24}[2], e_{32}[1], e_6[2], e_{18}[1], e_3[2], e_4[1], e_2[1], e_5[2], \\ &e_{20}[2]\} = \langle e_{15}[2], e_{12}[1], e_{13}[2], e_{28}[1], e_{29}[2], e_{35}[1], e_{31}[2], e_{32}[1], e_{22}[2], e_{21}[1], e_{20}[2], e_{18}[1], \\ &e_3[2], e_2[1] \rangle \oplus \langle e_5[2], e_4[1], e_6[2], e_8[1], e_{11}[2], e_{16}[1] \rangle \oplus \langle e_{24}[2], e_{25}[1], e_{27}[2], e_{33}[1] \rangle. \end{aligned}$$

Формируем обод графа, $c_0 = \{e_{18}[1], e_{19}[3], e_{20}[3], e_{21}[1], e_{22}[2], e_{29}[2], e_{36}[3]\}$.

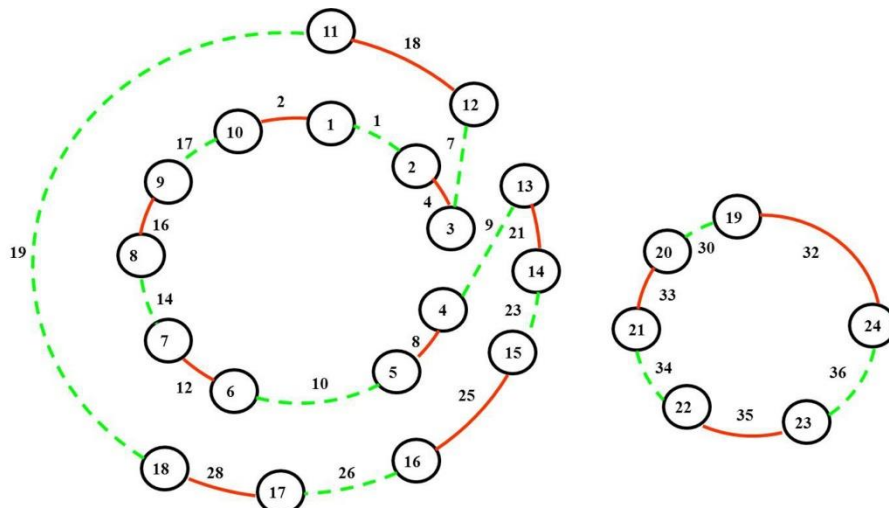


Рис. 9. Синий 2-фактор после ротации.

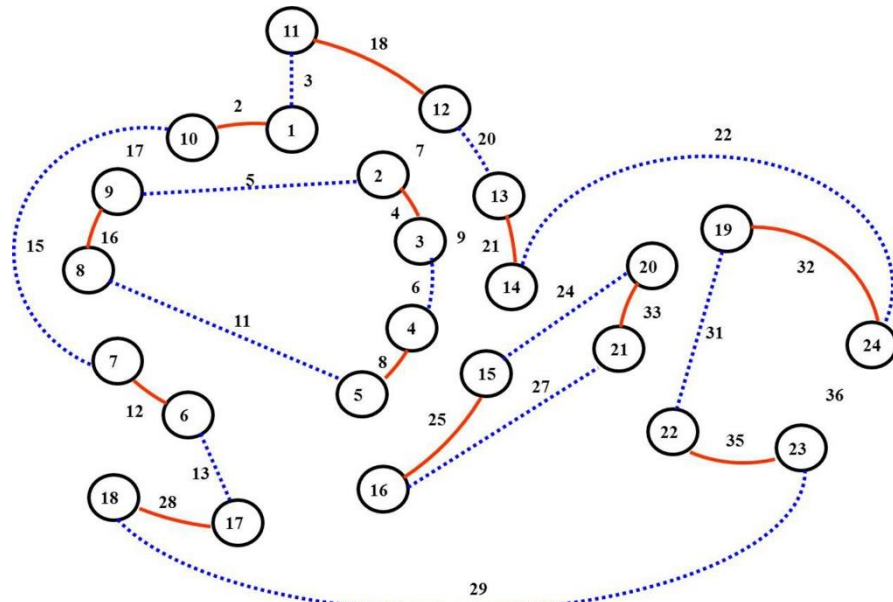


Рис. 10. Зеленый 2-фактор после ротации.

Правило определения состава дисков после ротации. Для определения состава цветных дисков после ротации цветного диска \bar{Y} необходимо произвести перекраску его ребер и к другим цветным 2-факторам присоединить циклы цветного диска \bar{Y} , затем произвести их реберное построение согласно (2).

Интерес представляют раскрашенные кубические графы, у которых белые цветные диски имеют четную длину и их суммарная длина равна $2m/3$.

Для раскрашенного кубического графа H_3 (рис. 11) выберем следующие базисные циклы:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \{e_2[2], e_3[1], e_8[1], e_{10}[2]\}; & c_2 &= \{e_1[3], e_2[2], e_4[1], e_6[3]\}; \\
 c_3 &= \{e_9[3], e_{10}[2], e_{11}[1], e_{13}[3]\}; & c_5 &= \{e_{11}[1], e_{12}[2], e_{14}[2], e_{23}[1]\}; \\
 c_4 &= \{e_4[1], e_5[2], e_7[2], e_{18}[1]\}; & c_7 &= \{e_{16}[2], e_{17}[1], e_{20}[1], e_{22}[2]\}; \\
 c_6 &= \{e_6[3], e_7[2], e_8[1], e_9[3], e_{12}[2], e_{15}[3], e_{17}[1], e_{24}[3]\}; & c_8 &= \{e_{15}[3], e_{16}[2], e_{18}[1], e_{19}[3]\}; \\
 c_7 &= \{e_{16}[2], e_{17}[1], e_{20}[1], e_{22}[2]\}; & c_9 &= \{e_{21}[3], e_{22}[2], e_{23}[1], e_{24}[3]\}. \\
 c_8 &= \{e_{15}[3], e_{16}[2], e_{18}[1], e_{19}[3]\}; & &
 \end{aligned}$$

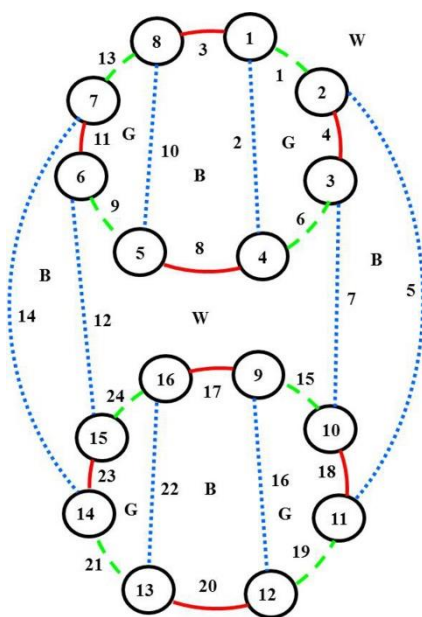


Рис. 11. Раскраска кубического графа H_3 .

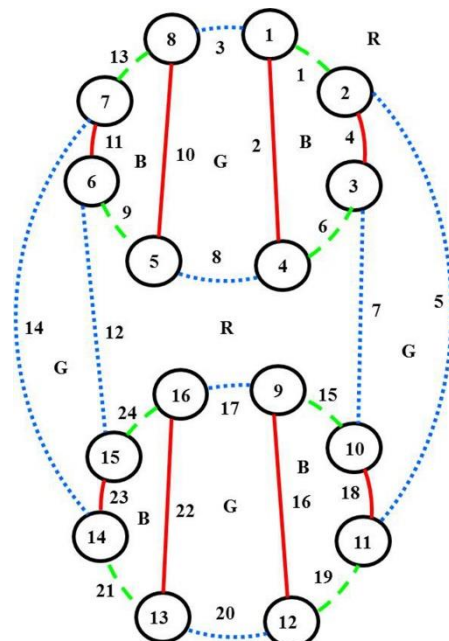


Рис. 12. Перекраска кубического графа H_3 .

Формируем обод, $c_0 = \{e_1[3], e_3[1], e_5[2], e_{13}[3], e_{14}[2], e_{19}[3], e_{20}[1], e_{21}[3]\}$.

$$\begin{aligned} R_c &= DR_1 \oplus DR_2 = (c_3 \oplus c_5 \oplus c_9) \oplus (c_2 \oplus c_4 \oplus c_8) = (\{e_9[3], e_{10}[2], e_{11}[1], e_{13}[3]\} \oplus \\ &\oplus \{e_{11}[1], e_{12}[2], e_{14}[2], e_{23}[1]\} \oplus \{e_{21}[3], e_{22}[2], e_{23}[1], e_{24}[3]\}) \oplus (\{e_1[3], e_2[2], e_4[1], e_6[3]\} \oplus \\ &\oplus \{e_4[1], e_5[2], e_7[2], e_{18}[1]\} \oplus \{e_{15}[3], e_{16}[2], e_{18}[1], e_{19}[3]\}) = \\ &= \langle e_9[3], e_{10}[2], e_{13}[3], e_{14}[2], e_{21}[3], e_{22}[2], e_{24}[3], e_{12}[2] \rangle \oplus \\ &\oplus \langle e_1[3], e_2[2], e_6[3], e_7[2], e_{15}[3], e_{16}[2], e_{19}[3], e_5[2] \rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_c &= DB_1 \oplus DB_2 = (c_1 \oplus c_2 \oplus c_3) \oplus (c_7 \oplus c_8 \oplus c_9) = (\{e_2[2], e_3[1], e_8[1], e_{10}[2]\} \oplus \\ &\oplus \{e_1[3], e_2[2], e_4[1], e_6[3]\} \oplus \{e_9[3], e_{10}[2], e_{11}[1], e_{13}[3]\}) \oplus (\{e_{16}[2], e_{17}[1], e_{20}[1], e_{22}[2]\} \oplus \\ &\oplus \{e_{15}[3], e_{16}[2], e_{18}[1], e_{19}[3]\} \oplus \{e_{21}[3], e_{22}[2], e_{23}[1], e_{24}[3]\}) = \\ &= \langle e_3[1], e_1[3], e_4[1], e_6[3], e_8[1], e_9[3], e_{11}[1], e_{13}[3] \rangle \oplus \\ &\oplus \langle e_{17}[1], e_{15}[3], e_{18}[1], e_{19}[3], e_{20}[1], e_{21}[3], e_{23}[1], e_{24}[3] \rangle; \end{aligned}$$

$$G_c = DG_1 \oplus DG_2 \oplus DG_3 \oplus DG_4 = (c_1) \oplus (c_4) \oplus (c_5) \oplus (c_7) = \langle e_2[2], e_3[1], e_8[1], e_{10}[2] \rangle \oplus \\ \oplus \langle e_4[1], e_5[2], e_7[2], e_{18}[1] \rangle \oplus \langle e_{11}[1], e_{12}[2], e_{14}[2], e_{23}[1] \rangle \oplus \langle e_{16}[2], e_{17}[1], e_{20}[1], e_{22}[2] \rangle.$$

$$W_c = c_6 \oplus c_0 = \{e_6[3], e_7[2], e_8[1], e_9[3], e_{12}[2], e_{15}[3], e_{17}[1], e_{24}[3]\} \oplus \\ \oplus \{e_1[3], e_3[1], e_5[2], e_{13}[3], e_{14}[2], e_{19}[3], e_{20}[1], e_{21}[3]\}.$$

Осуществим перекраску ребер, взяв за основу цветные диски вместо белых (рис. 12).

$$\begin{aligned} c_1 &= \{e_2[1], e_3[2], e_8[2], e_{10}[1]\}, & c_2 &= \{e_1[3], e_2[1], e_4[1], e_6[3]\}, \\ c_3 &= \{e_9[3], e_{10}[1], e_{11}[1], e_{13}[3]\}, & & \\ c_4 &= \{e_4[1], e_5[2], e_7[2], e_{18}[1]\}, & c_5 &= \{e_{11}[1], e_{12}[2], e_{14}[2], e_{23}[1]\}, \\ c_6 &= \{e_6[3], e_7[2], e_8[2], e_9[3], e_{12}[2], e_{15}[3], e_{17}[2], e_{24}[3]\}, & & \\ c_7 &= \{e_{16}[1], e_{17}[2], e_{20}[2], e_{22}[1]\}, & & \\ c_8 &= \{e_{15}[3], e_{16}[1], e_{18}[1], e_{19}[3]\}, & c_9 &= \{e_{21}[3], e_{22}[1], e_{23}[1], e_{24}[3]\}. \end{aligned}$$

Обод $c_0 = \{e_1[3], e_3[2], e_5[2], e_{13}[3], e_{14}[2], e_{19}[3], e_{20}[2], e_{21}[3]\}$.

$$\begin{aligned} R_c &= DR_1 \oplus DR_2 = (c_6) \oplus (c_0) = (c_6) \oplus (c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 \oplus c_8 \oplus c_9) = \\ &= \langle e_6[3], e_7[2], e_{15}[3], e_{17}[2], e_{24}[3], e_{12}[2], e_9[3], e_8[2] \rangle \oplus \\ &\oplus \langle e_1[3], e_3[2], e_{13}[3], e_{14}[2], e_{21}[3], e_{20}[2], e_{19}[3], e_5[2] \rangle; \end{aligned}$$

$$B_c = DB_1 \oplus DB_2 \oplus DB_3 \oplus DB_4 = (c_2) \oplus (c_3) \oplus (c_8) \oplus (c_9) = \langle e_1[3], e_2[1], e_6[3], e_4[1] \rangle \oplus \\ \oplus \langle e_9[3], e_{10}[1], e_{13}[3], e_{11}[1] \rangle \oplus \langle e_{15}[3], e_{16}[1], e_{19}[3], e_{18}[1] \rangle \oplus \langle e_{21}[3], e_{22}[1], e_{24}[3], e_{23}[1] \rangle;$$

$$G_\Phi = DG_1 \oplus DG_2 \oplus DG_3 \oplus DG_4 = (c_1) \oplus (c_4) \oplus (c_5) \oplus (c_7) = \langle e_2[1], e_3[2], e_{10}[1], e_8[2] \rangle \oplus \\ \oplus \langle e_4[1], e_5[2], e_{18}[1], e_7[2] \rangle \oplus \langle e_{11}[1], e_{12}[2], e_{23}[1], e_{14}[2] \rangle \oplus \langle e_{16}[1], e_{17}[2], e_{22}[1], e_{20}[2] \rangle.$$

5. Раскраска непланарных кубических графов

Интересен случай раскраски циклов в неплоских кубических графах (рис. 13).

Выделим базисные циклы в графе:

$$\begin{aligned} c_1 &= \{e_1, e_2, e_4, e_6\}; & c_2 &= \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}; & c_3 &= \{e_2, e_3, e_8, e_{11}\}; \\ c_4 &= \{e_4, e_5, e_7, e_{10}\}; & c_5 &= \{e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}; & c_0 &= \{e_1, e_3, e_5, e_{10}, e_{12}\}. \end{aligned}$$

Представим цветные диски для данной раскраски ребер в следующем виде:

$$DR_1 = (e_1, G) \oplus (e_5, B) \oplus (e_9, G) \oplus (e_8, B) \oplus (e_6, G) \oplus (e_7, B) \oplus (e_{12}, G) \oplus (e_3, B) = \\ = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4;$$

$$DB_1 = (e_1, G) \oplus (e_4, R) \oplus (e_6, G) \oplus (e_2, R) = c_1;$$

$$DB_2 = (e_9, G) \oplus (e_{10}, R) \oplus (e_{13}, G) \oplus (e_{11}, R) = c_2;$$

$$DG_1 = (e_2, R) \oplus (e_3, B) \oplus (e_{11}, R) \oplus (e_3, B) = c_3;$$

$$DG_2 = (e_4, R) \oplus (e_7, B) \oplus (e_{10}, R) \oplus (e_5, B) = c_4.$$

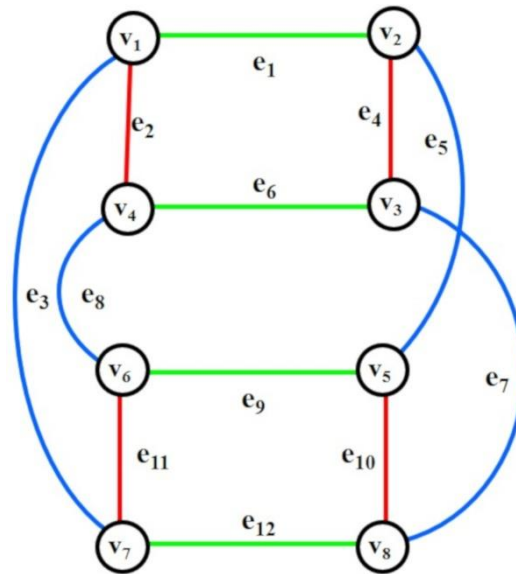


Рис. 13. Раскрашенный кубический непланарный граф H_3 .

Цветные 2-факторы раскрашенного кубического непланарного графа H_3 :

$$R_c = DR_1;$$

$$B_c = DB_1 \oplus DB_2;$$

$$G_c = DG_1 \oplus DG_2;$$

Отсюда можно определить цвета базисных циклов.

$$c_1 \rightarrow (R_c \cap B_c) \rightarrow G;$$

$$c_2 \rightarrow (R_c \cap B_c) \rightarrow G;$$

$$c_3 \rightarrow (R_c \cap G_c) \rightarrow B;$$

$$c_4 \rightarrow (R_c \cap G_c) \rightarrow B;$$

$$c_5 \rightarrow W;$$

$$c_0 \rightarrow W.$$

Рассмотрим раскраску ребер

$$e_1 \rightarrow (c_1 \cap c_0) \rightarrow G + W = G;$$

$$e_2 \rightarrow (c_1 \cap c_3) \rightarrow G + B = R;$$

$$e_3 \rightarrow (c_3 \cap c_0) \rightarrow B + W = B;$$

$$e_4 \rightarrow (c_1 \cap c_4) \rightarrow G + B = R;$$

$$e_5 \rightarrow (c_4 \cap c_0) \rightarrow B + W = B;$$

$$e_6 \rightarrow (c_1 \cap c_5) \rightarrow G + W = G;$$

$$e_7 \rightarrow (c_4 \cap c_5) \rightarrow B + W = B;$$

$$e_8 \rightarrow (c_3 \cap c_5) \rightarrow B + W = B;$$

$$e_9 \rightarrow (c_2 \cap c_5) \rightarrow G + W = G;$$

$$e_{10} \rightarrow (c_2 \cap c_4 \cap c_5 \cap c_0) \rightarrow G + W + W + B = R;$$

$$e_{11} \rightarrow (c_2 \cap c_3) \rightarrow G + B = R;$$

$$e_{12} \rightarrow (c_2 \cap c_0) \rightarrow G + W = G.$$

Рассмотрим следующий непланарный граф H_4 (рис. 14).

Выделим следующие базисные циклы в графе:

$$c_1 = \{e_1, e_2, e_5, e_{12}, e_{15}\};$$

$$c_2 = \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{16}\};$$

$$c_3 = \{e_1, e_3, e_4, e_7, e_{13}\};$$

$$c_4 = \{e_4, e_5, e_6, e_9, e_{17}\};$$

$$c_5 = \{e_6, e_7, e_8, e_{11}, e_{18}\};$$

$$c_6 = \{e_8, e_9, e_{10}, e_{12}, e_{15}, e_{17}\};$$

$$c_7 = \{e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}\};$$

$$c_0 = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{14}, e_{15}, e_{17}\}.$$

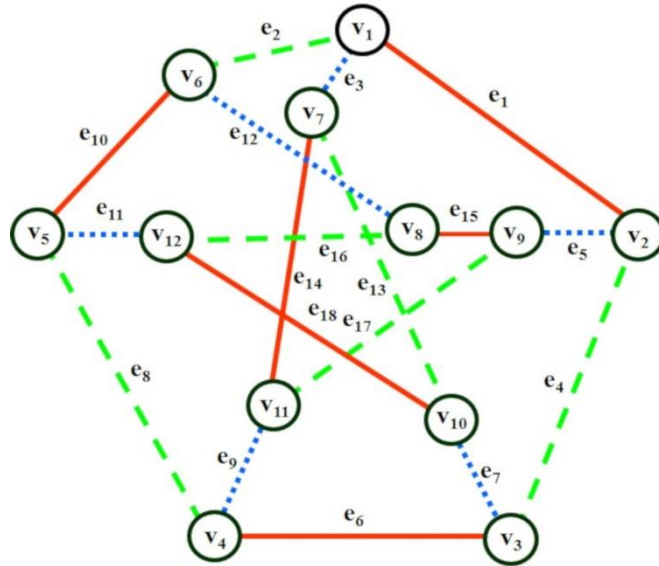


Рис. 14. Раскрашенный непланарный граф H_4

Цветные диски для данной раскраски ребер:

$$DR_1 = (e_2, G) \oplus (e_{12}, B) \oplus (e_{16}, G) \oplus (e_{11}, B) \oplus (e_8, G) \oplus (e_9, B) \oplus (e_{17}, G) \oplus (e_5, B) \oplus (e_4, G) \oplus (e_7, B) \oplus (e_{13}, G) \oplus (e_3, B) = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_6;$$

$$DB_1 = (e_1, R) \oplus (e_2, G) \oplus (e_{10}, R) \oplus (e_8, G) \oplus (e_6, R) \oplus (e_4, G) = c_1 \oplus c_4 \oplus c_6;$$

$$DB_2 = (e_{13}, G) \oplus (e_{18}, R) \oplus (e_{16}, G) \oplus (e_{15}, R) \oplus (e_{17}, G) \oplus (e_{14}, R) = c_7;$$

$$DG_1 = (e_{10}, R) \oplus (e_{11}, B) \oplus (e_{18}, R) \oplus (e_7, B) \oplus (e_6, R) \oplus (e_9, B) \oplus (e_{14}, R) \oplus (e_3, B) \oplus (e_1, R) \oplus (e_5, B) \oplus (e_{15}, R) \oplus (e_{12}, B) = c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_7.$$

Цветные 2-факторы раскрашенного кубического непланарного графа H_4 :

$$R_c = DR_1;$$

$$B_c = DB_1 \oplus DB_2;$$

$$G_c = DG_1;$$

Отсюда можно определить цвета базисных циклов.

$$c_1 \rightarrow (R_c \cap B_c) \rightarrow G; \quad c_2 \rightarrow (R_c \cap G_c) \rightarrow B;$$

$$c_3 \rightarrow (R_c \cap G_c) \rightarrow B; \quad c_4 \rightarrow (B_c \cap G_c) \rightarrow R;$$

$$c_5 \rightarrow W; \quad c_6 \rightarrow (B_c \cap R_c) \rightarrow G;$$

$$c_7 \rightarrow (B_c \cap G_c) \rightarrow R; \quad c_0 \rightarrow W.$$

Рассмотрим раскраску ребер

$$e_1 \rightarrow (c_1 \cap c_3) \rightarrow G + B = R; \quad e_2 \rightarrow (c_1 \cap c_0) \rightarrow G + W = G;$$

$$e_3 \rightarrow (c_3 \cap c_0) \rightarrow B + W = B; \quad e_4 \rightarrow (c_3 \cap c_4) \rightarrow B + R = G;$$

$$e_5 \rightarrow (c_1 \cap c_4) \rightarrow G + R = B; \quad e_6 \rightarrow (c_4 \cap c_5) \rightarrow R + W = R;$$

$$e_7 \rightarrow (c_3 \cap c_5) \rightarrow B + W = B; \quad e_8 \rightarrow (c_5 \cap c_6) \rightarrow G + W = G;$$

$$e_9 \rightarrow (c_4 \cap c_6) \rightarrow R + G = B; \quad e_{10} \rightarrow (c_2 \cap c_6) \rightarrow B + G = R;$$

$$e_{11} \rightarrow (c_2 \cap c_5) \rightarrow B + W = B;$$

$$e_{12} \rightarrow (c_1 \cap c_2 \cap c_6 \cap c_0) \rightarrow G + B + G + W = B;$$

$$e_{13} \rightarrow (c_3 \cap c_7) \rightarrow B + R = G; \quad e_{14} \rightarrow (c_7 \cap c_0) \rightarrow R + W = R;$$

$$e_{15} \rightarrow (c_7 \cap c_0) \rightarrow R + W = R; \quad e_{16} \rightarrow (c_2 \cap c_7) \rightarrow B + R = G;$$

$$e_{17} \rightarrow (c_4 \cap c_6 \cap c_7 \cap c_0) \rightarrow G + R + W + R = G;$$

$$e_{18} \rightarrow (c_5 \cap c_7) \rightarrow R + W = R.$$

Таким образом, формула 5 применима и для раскрашенных непланарных графов.

6. Цветное вращение вершин

Будем называть *цветным вращением вершин* циклический порядок вида 1 – 2 – 3 (R – B – G) обхода ребер для вершины плоского кубического графа **H**. Если ребра вершины раскрашены тремя цветами, то порядок обхода цветов 1 – 2 – 3 (R – B – G) для раскрашенных ребер может происходить либо по часовой стрелке, либо против. Поставим «+1» в соответствие тем вершинам, у которых цветное вращение происходит по часовой стрелке, а «-1» – тем, у которых против. Рассмотрим следующее цветное вращение вершин представленное на рис. 15.

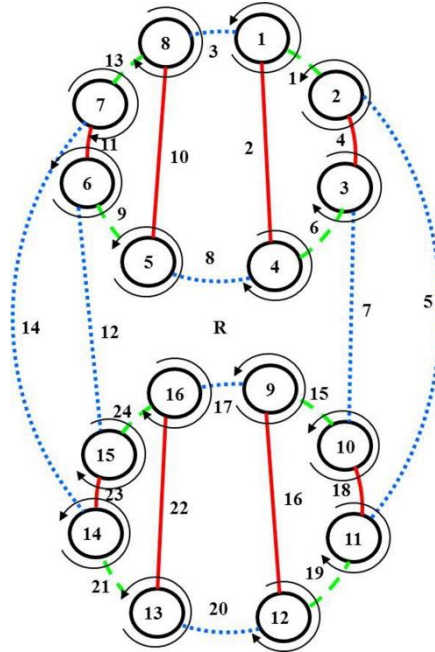


Рис. 15. Цветное вращение вершин.

Тогда для множества вершин, принадлежащих грани плоского кубического графа, можно записать систему уравнений Хивуда [1] для каждого базисного цикла и обода:

$$\begin{cases} x_i^2 \equiv 0 \pmod{3} \\ \sum_{i \in M_\alpha} x_i \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \quad (6)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, m-n+2$.

При этом решение системы Хивуда определяет раскраску, так как в системе Хивуда цветному вращению вершин плоского кубического графа по часовой стрелке можно поставить в соответствие «+1», а цветному вращению против – «-1».

Тогда можно записать уравнения Хивуда [1] в виде:

$$\begin{aligned} x(v_1) + x(v_4) + x(v_5) + x(v_8) &= (-1) + (+1) + (-1) + (+1) \equiv 0 \pmod{3}; \\ x(v_1) + x(v_2) + x(v_3) + x(v_4) &= (-1) + (-1) + (+1) + (+1) \equiv 0 \pmod{3}; \\ x(v_5) + x(v_6) + x(v_7) + x(v_8) &= (-1) + (-1) + (+1) + (+1) \equiv 0 \pmod{3}; \\ x(v_2) + x(v_3) + x(v_{10}) + x(v_{11}) &= (-1) + (+1) + (-1) + (+1) \equiv 0 \pmod{3}; \\ x(v_6) + x(v_7) + x(v_{14}) + x(v_{15}) &= (-1) + (+1) + (-1) + (+1) \equiv 0 \pmod{3}; \\ x(v_3) + x(v_4) + x(v_5) + x(v_6) + x(v_9) + x(v_{10}) + x(v_{15}) + x(v_{16}) &= \\ &= (+1) + (+1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (+1) + (+1) \equiv 0 \pmod{3}; \\ x(v_9) + x(v_{12}) + x(v_{13}) + x(v_{16}) &= (-1) + (+1) + (-1) + (+1) \equiv 0 \pmod{3}; \\ x(v_9) + x(v_{10}) + x(v_{11}) + x(v_{12}) &= (-1) + (-1) + (+1) + (+1) \equiv 0 \pmod{3}; \\ x(v_{13}) + x(v_{14}) + x(v_{15}) + x(v_{16}) &= (-1) + (-1) + (+1) + (+1) \equiv 0 \pmod{3}; \end{aligned}$$

$$x(v_1) + x(v_2) + x(v_7) + x(v_8) + x(v_{11}) + x(v_{12}) + x(v_{13}) + x(v_{14}) = \\ = (-1) + (-1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (-1) + (-1) \equiv 0 \pmod{3};$$

Для максимально плоских графов справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [4]. Пусть M – множество вершин плоского кубического графа. Тогда для любой правильной раскраски

$$\sum_{\mu \in M} x_{\mu} \equiv 0 \pmod{4} \quad (7)$$

И действительно:

$$x(v_1) + x(v_2) + x(v_3) + x(v_4) + x(v_5) + x(v_6) + x(v_7) + x(v_8) + x(v_9) + x(v_{10}) + x(v_{11}) + x(v_{12}) + \\ x(v_{13}) + x(v_{14}) + x(v_{15}) + x(v_{16}) = (-1) + (-1) + (+1) + (+1) + (-1) + (+1) + (+1) + (-1) + (-1) + (-1) \\ + (+1) + (+1) + (-1) + (-1) + (+1) + (+1) \equiv 0 \pmod{4}.$$

Построим замкнутые маршруты Хивуда в плоском раскрашенном кубическом графе, последовательно выбирая ребра согласно цветному вращению вершин.

$$\mu_1 = \langle e_3[1], e_{10}[2], e_9[3], e_{11}[1], e_{14}[2], e_{21}[3], e_{20}[1], e_{16}[2], e_{15}[3], e_{18}[1], e_5[2], e_1[3] \rangle;$$

$$\mu_2 = \langle e_3[1], e_2[2], e_6[3], e_4[1], e_5[2], e_{19}[3], e_{20}[1], e_{22}[2], e_{24}[3], e_{23}[1], e_{14}[2], e_{13}[3] \rangle;$$

$$\mu_3 = \langle e_{23}[1], e_{12}[2], e_9[3], e_8[1], e_2[2], e_1[3], e_4[1], e_7[2], e_{15}[3], e_{17}[1], e_{22}[2], e_{21}[3] \rangle;$$

$$\mu_4 = \langle e_{11}[1], e_{12}[2], e_{24}[3], e_{17}[1], e_{16}[2], e_{19}[3], e_{18}[1], e_7[2], e_6[3], e_8[1], e_{10}[2], e_{13}[3] \rangle.$$

Замкнутые маршруты Хивуда проходят по ребру дважды, но второй раз всегда в обратном направлении. Длина замкнутого маршрута Хивуда кратна трем.

7. Заключение

В работе рассмотрены алгебраические методы раскраски плоских кубических графов, основанные на теореме Тэйта. Описание раскраски плоского кубического графа выполнено с применением группового преобразования Клейна четвертого порядка. Топологический рисунок плоского графа, описываемый вращением вершин, индуцирует базисные простые циклы подпространства циклов. Переход к раскраске графа производится при помощи раскраски ребер базисных циклов. Предполагается, что такая раскраска произведена методами, представленными в работе [3]. Выполнено формирование цветных дисков на основе раскраски ребер. Для однозначного описания представления цветных дисков через базисные циклы введено понятие вложимости цветных дисков. Рассмотрены вопросы математического описания операции ротации цветных дисков и последующей их перекраски. Выявлена зависимость между цветным вращением вершин плоского кубического графа и замкнутыми маршрутами Хивуда.

Список литературы

1. А.А. Зыков. Основы теории графов / Зыков А.А. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1987. – 384 с.
2. И. Гроссман. Группы и их графы / Гроссман, И., Магнус В. – М.: Мир, 1971. – 238 с.
3. С.В. Курапов, М.В. Давидовский, А.В. Толок. Визуальный алгоритм раскраски плоских графов // Научная визуализация. – 2018, том 10, номер 3. – С. 1–33.
4. Н.З. Шор, Г.А. Донец. Алгебраический подход к проблеме раскраски плоских графов / Г.А. Донец, Н.З. Шор. – Київ: Наук.думка, 1982. – 144 с.
5. Г. Рингель. Теорема о раскраске карт / Рингель, Г. – М.: Мир, 1977. – 126 с.
6. М. Свами. Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир. – 1984. – 455 с.

Algebraic methods for coloring cubic graphs

S.V. Kurapov^{1,A}, M.V. Davidovsky^{2,B}, A.V. Tolok^{3,C}

^A Zaporozhye National University, Ukraine

^B Zaporozhye Institute of Postgraduate Pedagogical Education, Ukraine

^C Moscow State Technological University «STANKIN», Russia

¹ ORCID: 0000-0003-4563-7227, lilili5050@rambler.ru

² ORCID: 0000-0002-9472-3351, m.davidovsky@gmail.com

³ ORCID: 0000-0002-7257-9029, a.tolok@stankin.ru

Abstract

The article addresses algebraic methods for coloring arbitrary cubic graphs. The results are partially based on the corollaries of the Tait theorem. In the article, the authors propose using a fourth-order Klein group transform in order to formally describe the coloring of a cubic graph. The transition to graph coloring is done by coloring the edges of basis cycles. Overall, the mathematical framework for describing topological graph drawing is presented and formally described in the article. Based on the edge coloring, the formation of colored disks and the mathematical description of the operation of colored disks rotation with subsequent recoloring of the edges are considered. It is shown that the operation of rotating color disks can be represented as a ring sum (addition modulo 2) of cycles. In order to unambiguously describe the representation of colored disks by means of basis cycles, the authors introduce the concept of embeddability of colored disks. For clarity, the authors provide several examples illustrating the application of colored disks rotation operation to concrete cubic graphs. The relation between the system of induced cycles generated by the rotation of graph vertices and the coloring of 2-factors of the cubic graph is established in the present study. It is shown that the ring sum of all cycles included in the colored 2-factors of the graph is an empty set. The article also addresses the issues of coloring non-planar cubic graphs. The relationship between basis cycles and a rim in a non-planar cubic graph and a ring sum of colored 2-factors is explicitly shown in the article. In addition, the relationship between the colored vertex rotation of a plane cubic graph and the closed Heawood paths is revealed and formally described.

Keywords: graph, topological graph drawing, geometric image of graph drawing, rotation of graph vertices, isometric cycles, planarity.

References

1. A.A. Zykov. Fundamentals of Graph Theory. – B C S Associates, 1990. – 365 p.
2. I. Grossman, W Magnus. In Groups and Their Graphs. – Mathematical Association of America, 1992. – 195 p.
3. Kurapov S. V, Davidovsky M. V. Visual algorithm for coloring planar graphs // Scientific Visualization. – 2018, Vol. 10, No 3 – P. 1–33.
4. N. Z. Shor, G. A. Donets. Algebraic Approach to the Plane Graph Coloring. – Naukova Dumka, 1982. English translation published by Springer-Verlag, Berlin, 1985.
5. G. Ringel. Map Color Theorem. – Repr. of the orig. 1st ed. (1974), Springer, 2011. – 212 p.
6. M. N. S. Swamy. Graphs, networks, and algorithms / Swamy, M.N.S., Thulasiraman K. – Wiley New York, 1981. – 592 p.
7. P. G. Tait. Remarks on the Colourings of Maps // In Proc. R. Soc. Edinburgh 10: 729, 1880.