

Модифицированный алгоритм проверки планарности графа и построение топологического рисунка. Метод нитей.

С.В. Курапов^{1,A}, М.В. Давидовский^{2,B}, А.В. Толлок^{3,C}

^A Запорожский национальный университет, Украина

^B Запорожский институт последипломного педагогического образования, Украина

^C Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Россия

¹ ORCID: 0000-0003-4563-7227, lilili5050@rambler.ru

² ORCID: 0000-0002-9472-3351, m.davidovsky@gmail.com

³ ORCID: 0000-0002-7257-9029, a.tolok@stankin.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается модифицированный алгоритм проверки графа на планарность с одновременным построением математических структур для описания топологического рисунка плоского графа. В качестве таких математических структур рассматриваются изометрические циклы и вращение вершин графа. Получение вращения вершин графа сразу решает две важнейшие задачи: задачу проверки графа на планарность и задачу построения топологического рисунка плоского графа. Полученная в результате работы алгоритма система изометрических циклов графа индуцирует вращение вершин для описания топологического рисунка плоского графа с последующей его визуализацией. Топологический рисунок плоской части графа позволяет описывать процесс планаризации алгебраическими методами, не производя никаких геометрических построений на плоскости. Представленный алгоритм основан на перестройке опорного цикла и построении блоков обратных маршрутов. Основой расчёта является выделение DFS-дерева графа (методом поиска в глубину). Визуализация планарных графов является важнейшей подзадачей при решении множества актуальных прикладных задач, таких как проектирование сложных изделий и систем, плоских конструктивов, анализ социальных сетей и др. Вычислительная сложность алгоритма определяется как $O(m) = f_1(m) + f_2(m)$, где m – количество рёбер графа.

Ключевые слова: граф, проверка планарности, визуализация графов, топологический рисунок графа, диаграмма вращения вершин, изометрические циклы, опорный цикл.

Введение

Построение рисунка плоского графа и визуализация его изображения [1-5] являются важными подзадачами, возникающими при решении многих актуальных прикладных задач. Например, для визуализации различных задач современного производства [6,7], а также при создании систем автоматизации проектирования плоских конструктивов, где под плоским конструктивом будем понимать техническое устройство (конструкцию), в котором непересека-

ющиеся соединения между элементами устройства и сами элементы расположены в параллельных (эквидистантных) плоскостях. Это могут быть печатные платы, интегральные микросхемы, БИС, СБИС и т.д. В работе [8] авторами данной статьи был представлен метод проверки планарности графа с одновременным построением математических структур для описания топологического рисунка графа с целью его визуализации. Метод основывается на построении системы изометрических циклов [9,10], понятии вращения вершин графа [11], а

также введении операции определения пересечения рёбер как пересечения их проекций на координатно-базисную систему, в качестве которой выступает опорный цикл DFS-дерева графа [8]. Стоит отметить, что на сегодняшний день существуют эффективные алгоритмы, позволяющие определить, является ли граф планарным, со сложностью характеризующейся линейной зависимостью от количества вершин графа [12]. В отличие от алгоритмов с линейной сложностью, метод, описанный в работе [8], обладает более высокой вычислительной сложностью ($O(m^2)$, где m – количество вершин графа). Хотя этот метод позволяет не только определить, является ли граф планарным, но и получить топологический рисунок графа, который может затем использоваться для визуализации графа, высокую вычислительную сложность можно считать его существенным недостатком. В данной работе мы будем рассматривать модифицированный метод определения планарности и построения вращения вершин с вычислительной сложностью соизмеримой с алгоритмом Хопкрофта-Тарьяна [13]. Для этой цели необходимо исключить из расчета самую длительную процедуру сравнения проекций обратных маршрутов на координатно-базисную систему, образованную опорным циклом. Такой способ существует! Он основан на способе переформирования DFS-дерева и обратных путей, а также на рекурсивном способе построения оброчей.

1. Действия над суграфами

Напомним основные положения и определения, необходимые для описа-

ния наших алгоритмов. Пусть задан произвольный граф G . Последовательно просматривая все вершины графа, удалим петли, «висячие» вершины и кратные ребра (если таковые будут найдены). Затем удалим мосты и точки сочленения, тем самым получив несколько компонент связности, которые можно рассматривать по отдельности. Два ребра, соединённых одной вершиной, имеющей локальную степень равную двум, можно заменить одним ребром. Естественно, что преобразование нужно запомнить для последующего восстановления первоначального вида графа G после проверки.

В дальнейшем будем рассматривать несепарабельные неориентированные графы $G = (X, U)$. С этой целью расширим понятие несепарабельного графа.

Определение 1. *Несепарабельным графом G будем называть связный неориентированный граф без петель и кратных ребер, без мостов и точек сочленения, без вершин с локальной степенью меньшей или равной двум.*

К таким несепарабельным графам для определения планарности можно применить критерий планарности Маклейна [14] и использовать операцию кольцевого суммирования суграфов в подпространстве циклов.

Пусть $G = (X, U)$ – несепарабельный граф с пронумерованным множеством ребер $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ и $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ вершин, причём $\text{card } X = n$ и $\text{card } U = m$. Обычно граф G представляется матрицей инциденций или матрицей смежностей. Графически граф может быть представлен диаграммой, в которой вершина изображена точкой или кружком, а ребро – отрезком линии, соединяющим вершины [15-17].

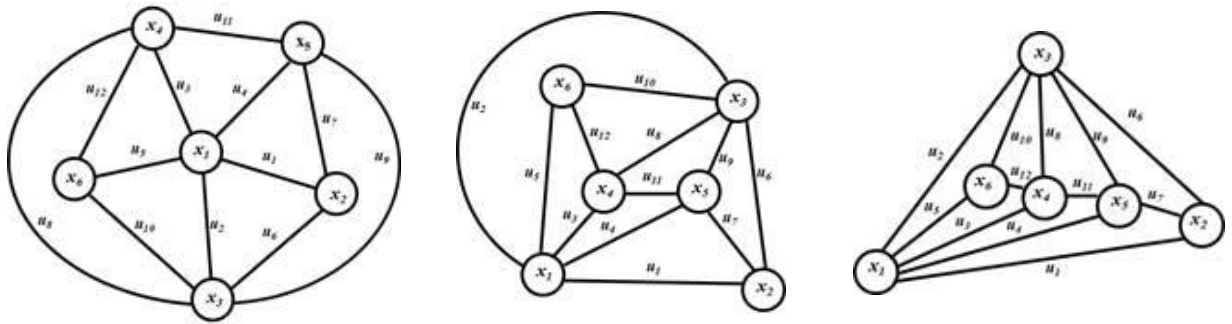


Рис. 1. Различные диаграммы графа G

В случае планарного графа всегда имеется возможность проведения соединений (рёбер графа) без пересечений. Такое представление планарного графа называется *плоским изображением графа* (см. рис. 1).

Следует отметить, что существуют структуры, которые являются общими для любого плоского изображения графа. Рассмотрим множество простых циклов являющихся границами граней плоского изображения. В качестве примера рассмотрим граф G, представленный на рис. 1. Запишем множество граничных циклов в виде элементов пространства суграфов:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{u_2, u_5, u_{10}\}; & C_2 &= \{u_3, u_5, u_{12}\}; \\ C_3 &= \{u_8, u_{10}, u_{12}\}; & C_4 &= \{u_8, u_9, u_{11}\}; \\ C_5 &= \{u_6, u_7, u_9\}; & C_6 &= \{u_3, u_4, u_{11}\}; \\ C_7 &= \{u_1, u_4, u_7\}; & C_8 &= \{u_1, u_2, u_6\}. \end{aligned}$$

Цикломатическое число определяет количество независимых циклов графа $\nu(G) = m - n + 1$. Кольцевая сумма независимых циклов определяет обод.

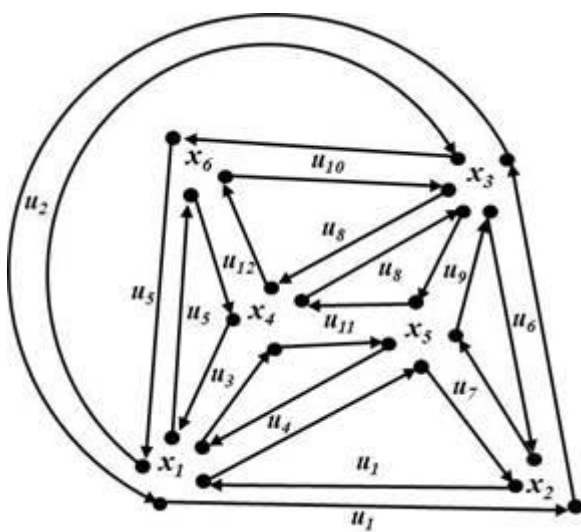


Рис. 2. Задание направления обхода рёбер в циклах

Если задать направление обхода рёбер в циклах с соблюдением условия планарности Маклейна [14], то можно записать циклы как кортежи вершин (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} C_1 &= \{u_2, u_5, u_{10}\} \rightarrow \langle x_1, x_3, x_6 \rangle; \\ C_2 &= \{u_3, u_5, u_{12}\} \rightarrow \langle x_1, x_6, x_4 \rangle; \\ C_3 &= \{u_8, u_{10}, u_{12}\} \rightarrow \langle x_4, x_6, x_3 \rangle; \\ C_4 &= \{u_8, u_9, u_{11}\} \rightarrow \langle x_4, x_3, x_5 \rangle; \\ C_5 &= \{u_6, u_7, u_9\} \rightarrow \langle x_3, x_2, x_5 \rangle; \\ C_6 &= \{u_3, u_4, u_{11}\} \rightarrow \langle x_4, x_5, x_1 \rangle; \\ C_7 &= \{u_1, u_4, u_7\} \rightarrow \langle x_1, x_5, x_2 \rangle; \\ C_8 &= \{u_1, u_2, u_6\} \rightarrow \langle x_1, x_2, x_3 \rangle. \end{aligned}$$

С другой стороны, заданное подмножество циклов с направлением обхода рёбер порождает (индуцирует) определённый циклический порядок расположения смежных вершин для каждой вершины (см. рис. 3).

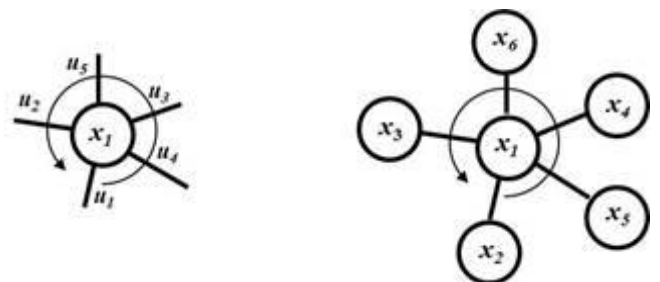


Рис. 3. Вращение вершины x_1

Определение 2. Для данного графа G вращение вершины A графа G – это ориентированный циклический порядок (или циклическая перестановка) всех рёбер, инцидентных вершине A.

Вращение графа можно описывать и представлять следующим образом. Обозначим вершины x_1, x_2, \dots, x_n . Затем выпишем циклическую перестановку сосе-

дей для каждой вершины x_i . Эта перестановка порождается вращением вершины x_i , которое является циклической перестановкой рёбер, инцидентных вершине x_i .

Вращение вершины x_i будем обозначать \hat{h}_i . Вращение всех вершин описывается диаграммой вращения вершин \hat{h} . В нашем случае диаграмма вращения вершин \hat{h} имеет вид:

$$\hat{h}_1 : x_2 \ x_5 \ x_4 \ x_6 \ x_3$$

$$\hat{h}_2 : x_3 \ x_5 \ x_1$$

$$\hat{h}_3 : x_1 \ x_6 \ x_4 \ x_5 \ x_2$$

$$\hat{h}_4 : x_6 \ x_1 \ x_5 \ x_3$$

$$\hat{h}_5 : x_4 \ x_1 \ x_2 \ x_3$$

$$\hat{h}_6 : x_1 \ x_4 \ x_3$$

Пусть x_1 – вершина инцидентная ребру u_1 в графе G с вращением \hat{h} . Тогда можно построить в графе G замкнутый маршрут:

$$x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, u_3, \dots, \quad (1)$$

где вершина x_2 – второй конец ребра u_1 , а ребро u_2 следует за ребром u_1 во вращении вершины x_2 определяемом вращением \hat{h} . Затем определяется x_3 как вершина инцидентная ребру u_2 и не равная x_2 . После этого в качестве u_3 выбирается ребро, следующее за ребром u_2 во вращении вершины x_3 и т.д. Закончим процесс в точности перед тем моментом когда должна повториться пара x_1, u_1 . Она должна повториться, так как граф G конечный, а наш процесс однозначно определён и в обратном направлении, а именно, если часть x_{t-1}, u_t, x_t, \dots известна, то ребро u_{t-1} определяется вращением вокруг вершины x_{t-1} . Мы назовём такой замкнутый маршрут циклом, порождённым вершиной x_1 и ребром u_1 и индуцированным вращением \hat{h} .

Тем самым вращение вершин \hat{h} индуцирует (порождает) простые циклы. В свою очередь система независимых циклов и обод индуцируют вращение вершин \hat{h} .

Введём следующие понятия, связанные с метрикой графа.

Определение 3 [7]. *Изометрический подграф* – подграф G^* графа G , у которого все расстояния внутри G^* те же самые, что и в G .

Определение 4. *Изометрическим циклом* в графе называется простой цикл, для которого кратчайший путь между любыми двумя его вершинами состоит из рёбер этого цикла. Изометрический цикл – частный случай изометрического подграфа.

В таком цикле между любыми двумя его несмежными вершинами в графе G не существует маршрутов меньшей длины, чем маршруты, принадлежащие данному циклу.

Теперь предположим, что планарный граф G вложен в евклидову плоскость, причём выполняется такое свойство:

Граница любой внутренней грани – изометрический цикл графа G .

Теперь можно дать определение топологического рисунка графа.

Определение 5. *Топологическим рисунком планарного графа* будем называть одинаково направленное вращение всех его вершин \hat{h} , индуцирующее множество изометрических циклов графа, которое удовлетворяет критерию планарности Маклейна [14].

Перед тем как перейти к описанию алгоритма, рассмотрим вопросы необходимых действий над суграфами.

Любой суграф может быть записан как множество его рёбер. Что касается ориентированных циклов, то здесь возможно три вида записи цикла, например (см. рис. 4):

$$c_4 = \{u_4, u_5, u_6, u_9, u_{27}\} \rightarrow \langle x_2, x_3, x_4, x_{15}, x_{14}, x_2 \rangle \rightarrow \langle x_2, x_3 \rangle + \langle x_3, x_4 \rangle + \langle x_4, x_{15} \rangle + \langle x_{15}, x_{14} \rangle + \langle x_{14}, x_2 \rangle.$$

Первая запись $\{u_4, u_5, u_6, u_9, u_{27}\}$ характеризуется множеством рёбер. Вторая запись характеризует кортеж, состоящий из последовательности вершин. Третья запись представляет цикл в виде последовательного сложения ориентированных дуг.

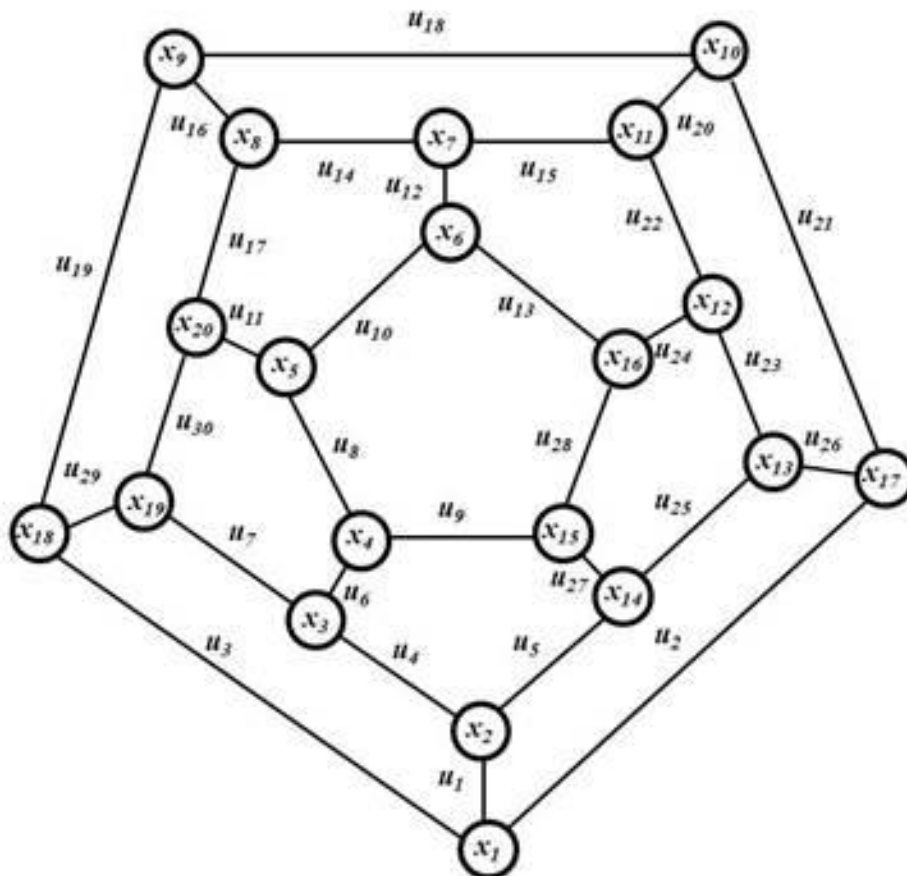


Рис. 4. Граф G_1

Известно также, что любое неориентированное ребро в графе можно представить в виде двух разнонаправленных ориентированных рёбер [15-17]. Например, ребро u_4 можно записать как $u_4 = \{x_2, x_3\} \rightarrow \langle x_2, x_3 \rangle + \langle x_3, x_2 \rangle$. Тогда сложение двух ориентированных циклов можно представить в виде последовательного сложения ориентированных рёбер, например (см. рис. 4):

$$c_4 \oplus c_5 = \{u_4, u_5, u_6, u_9, u_{27}\} \oplus \{u_8, u_9, u_{10}, u_{13}, u_{28}\} \rightarrow \langle x_2, x_3, x_4, x_{15}, x_{14}, x_2 \rangle + \langle x_4, x_5, x_6, x_{16}, x_{15}, x_4 \rangle \rightarrow \langle x_2, x_3 \rangle + \langle x_3, x_4 \rangle + \langle x_4, x_{15} \rangle + \langle x_{15}, x_{14} \rangle + \langle x_{14}, x_2 \rangle + \langle x_4, x_5 \rangle + \langle x_5, x_6 \rangle + \langle x_6, x_{16} \rangle + \langle x_{16}, x_{15} \rangle + \langle x_{15}, x_4 \rangle = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{16}, x_{15}, x_{14}, x_2 \rangle.$$

В этой операции разнонаправленные ориентированные рёбра попарно сокращаются.

Другой важной операцией является включение ребра в цикл. Данная операция позволяет разбить цикл на две части. Например, в произвольный цикл

$c_i = \langle x_{18}, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{17}, x_1, x_{18} \rangle$ нужно включить ребро $\{x_{10}, x_{17}\}$. Для выполнения этой операции необходимо чтобы концевые вершины вновь введённого ребра (или совокупности рёбер) принадлежали циклу. Тогда к содержимому цикла можно добавить ориентированные дуги данного ребра (или совокупности рёбер):

$$c_i = \langle x_{18}, x_9 \rangle + \langle x_9, x_{10} \rangle + \langle x_{10}, x_{11} \rangle + \langle x_{11}, x_{12} \rangle + \langle x_{12}, x_{13} \rangle + \langle x_{13}, x_{17} \rangle + \langle x_{17}, x_1 \rangle + \langle x_1, x_{18} \rangle + \langle x_{17}, x_{10} \rangle + \langle x_{10}, x_{17} \rangle$$

При этом содержимое цикла разбивается на части, где концевые вершины ребра участвуют в формировании маршрутов:

$$\langle x_{17}, x_1 \rangle + \langle x_1, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_9 \rangle + \langle x_9, x_{10} \rangle; \\ \langle x_{10}, x_{11} \rangle + \langle x_{11}, x_{12} \rangle + \langle x_{12}, x_{13} \rangle + \langle x_{13}, x_{17} \rangle.$$

Затем с соблюдением последовательности к выделенным частям присоединяются дуги. Таким образом, образуются два новых обруча:

$$\begin{aligned}
&\langle x_{17}, x_1 \rangle + \langle x_1, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_9 \rangle + \langle x_9, x_{10} \rangle + \\
&+ \langle x_{10}, x_{17} \rangle; \\
&\langle x_{10}, x_{11} \rangle + \langle x_{11}, x_{12} \rangle + \langle x_{12}, x_{13} \rangle + \langle x_{13}, x_{17} \rangle + \\
&+ \langle x_{17}, x_{10} \rangle.
\end{aligned}$$

Введя необходимые обозначения и операции, продолжим рассмотрение вопросов дальнейшего развития методов и алгоритмов проверки графа на планарность с одновременным получением топологического рисунка графа.

2. Распределение обратных путей по блокам

Рассмотрим следующий пример проверки на планарность графа G_1 представленного на рис. 4. Выделим DFS-дерево методом поиска в глубину (см. рис. 5).

Построим фундаментальную матрицу циклов для выбранного дерева.

Используя фундаментальную матрицу циклов, выберем самый длинный цикл, образованный ветвями дерева и одной хордой (см. рис. 5). Пусть это будет цикл $\langle x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_4 \rangle$. Данный цикл будем называть *опорным*.

Определение 6. Обратным ребром – называется ориентированный маршрут, состоящий из одной хорды.

Определение 7. Обратным путём – называется ориентированный маршрут, состоящий из последовательно расположенных ветвей дерева и одной, и

только одной, хорды. Причем, концевые вершины такого обратного пути не всегда принадлежат опорному циклу.

Очевидно, что обратные ребра являются частным случаем обратных путей.

Как известно, матрица фундаментальных циклов состоит из двух подматриц: единичной подматрицы и подматрицы \mathcal{L} состоящей только из ветвей дерева.

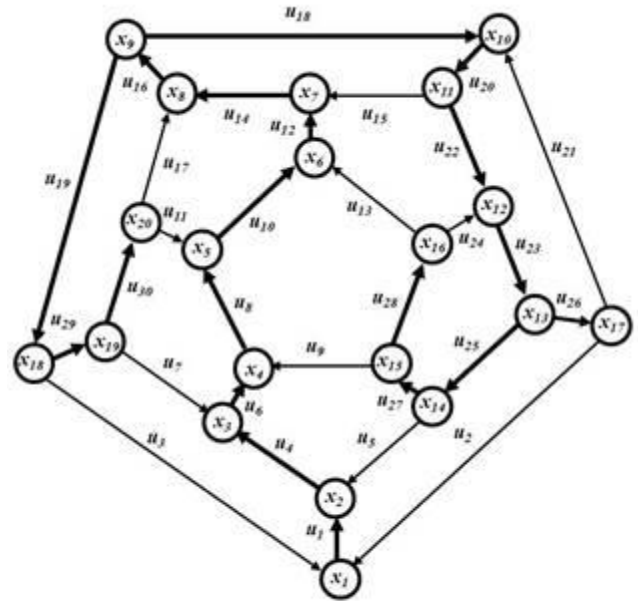


Рис. 5. DFS-дерево графа G_1 , опорный цикл и обратные пути.

Фундаментальная подматрица π имеет вид:

		u4	u6	u8	u10	u12	u14	u16	u18	u20	u22	u23	u25	u27	u28	u1	u26	u19	u29	u30
S5	u2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				1	1			
S6	u3	1	1	1	1	1	1	1								1		1		
	u5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
S7	u7		1	1	1	1	1	1										1	1	
S1	u9			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
S8	u11				1	1	1	1										1	1	1
S3	u13					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
	u15						1	1	1	1										
S9	u17							1										1	1	1
S4	u21									1	1	1					1			
S2	u24											1	1	1	1					

Разбиваем подматрицу π на две части: часть, состоящую из ветвей дерева принадлежащих опорному циклу, и часть, состоящую из ветвей дерева не принадлежащих опорному циклу (выделены серым цветом). Строим обратные пути. Для этого объединяем ветви дерева, не включённые в опорный цикл и соответствующую хорду:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \{u_{27}, u_9\} \rightarrow \langle x_{14}, x_{15}, x_4 \rangle \rightarrow \langle x_{14}, x_{15} \rangle + \langle x_{15}, x_4 \rangle; \\
 S_2 &= \{u_{27}, u_{28}, u_{24}\} \rightarrow \langle x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{12} \rangle \rightarrow \langle x_{14}, x_{15} \rangle + \langle x_{15}, x_{16} \rangle + \langle x_{16}, x_{12} \rangle; \\
 S_3 &= \{u_{27}, u_{28}, u_{13}\} \rightarrow \langle x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_6 \rangle \rightarrow \langle x_{14}, x_{15} \rangle + \langle x_{15}, x_{16} \rangle + \langle x_{16}, x_6 \rangle; \\
 S_4 &= \{u_{26}, u_{21}\} \rightarrow \langle x_{13}, x_{17}, x_{10} \rangle \rightarrow \langle x_{13}, x_{17} \rangle + \langle x_{17}, x_{10} \rangle; \\
 S_5 &= \{u_{26}, u_2, u_1\} \rightarrow \langle x_{13}, x_{17}, x_1, x_2 \rangle \rightarrow \langle x_{13}, x_{17} \rangle + \langle x_{17}, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle; \\
 S_6 &= \{u_{19}, u_3, u_1\} \rightarrow \langle x_9, x_{18}, x_1, x_2 \rangle \rightarrow \langle x_9, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle; \\
 S_7 &= \{u_{19}, u_{29}, u_7\} \rightarrow \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_3 \rangle \rightarrow \langle x_9, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_{19} \rangle + \langle x_{19}, x_3 \rangle; \\
 S_8 &= \{u_{19}, u_{29}, u_{30}, u_{11}\} \rightarrow \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_5 \rangle \rightarrow \langle x_9, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_{19} \rangle + \langle x_{19}, x_{20} \rangle + \langle x_{20}, x_5 \rangle; \\
 S_9 &= \{u_{19}, u_{29}, u_{30}, u_{17}\} \rightarrow \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_8 \rangle \rightarrow \langle x_9, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_{19} \rangle + \langle x_{19}, x_{20} \rangle + \langle x_{20}, x_8 \rangle.
 \end{aligned}$$

Объединяем обратные пути в блоки. Объединение в блоки осуществляется по первой вершине:

Блок B_1 включает следующие обратные пути:

$$\begin{aligned}
 \{S_1 &= \langle x_{14}, x_{15}, x_4 \rangle, \\
 S_2 &= \langle x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{12} \rangle, \\
 S_3 &= \langle x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_6 \rangle\}.
 \end{aligned}$$

Блок B_2 включает следующие обратные пути:

$$\begin{aligned}
 \{S_4 &= \langle x_{13}, x_{17}, x_{10} \rangle, \\
 S_5 &= \langle x_{13}, x_{17}, x_1, x_2 \rangle\}.
 \end{aligned}$$

Блок B_3 включает следующие обратные пути:

$$\begin{aligned}
 \{S_6 &= \langle x_9, x_{18}, x_1, x_2 \rangle, \\
 S_7 &= \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_3 \rangle, \\
 S_8 &= \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_5 \rangle, \\
 S_9 &= \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_8 \rangle\}.
 \end{aligned}$$

В блоке обратных путей B_1 выбираем самый длинный путь, и называем его

главным обратным путём для блока B_1 . В данном случае это будет путь $s_3 = \langle x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_6 \rangle$. Следующий обратный путь $s_2 = \langle x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{12} \rangle$ имеет последовательность вершин $\langle x_{14}, x_{15}, x_{16} \rangle$ уже включённую в главный обратный путь. Остаётся только блочное обратное ребро, состоящее из вершин $\langle x_{16}, x_{12} \rangle$. Следующий обратный путь $s_1 = \langle x_{14}, x_{15}, x_4 \rangle$ имеет последовательность вершин $\langle x_{14}, x_{15} \rangle$ уже включённую в главный обратный путь. Остаётся только блочное обратное ребро, состоящее из вершин $\langle x_{15}, x_4 \rangle$.

В блоке обратных путей B_2 выбираем самый длинный путь, и называем его главным обратным путём для блока B_2 . В данном случае это будет путь $s_5 = \langle x_{13}, x_{17}, x_1, x_2 \rangle$. Следующий обратный путь $s_4 = \langle x_{13}, x_{17}, x_{10} \rangle$ имеет последовательность вершин $\langle x_{13}, x_{17} \rangle$ уже вклю-

чѐнную в главный обратный путь. Остаѐтся только блочное обратное ребро, состоящее из вершин $\langle x_{17}, x_{10} \rangle$.

В блоке обратных путей B_3 выбираем самый длинный путь, и называем его *главным обратным путем для блока B_3* . В данном случае выбираем путь $s_9 = \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_8 \rangle$. Следующий обратный путь $s_8 = \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_5 \rangle$ имеет последовательность вершин $\langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20} \rangle$ уже включѐнную в главный обратный путь. Остаѐтся только блочное обратное ребро, состоящее из вершин $\langle x_{20}, x_5 \rangle$. Следующий обратный путь $s_7 = \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_3 \rangle$ имеет последовательность вершин $\langle x_9, x_{18}, x_{19} \rangle$ уже включѐнную в главный обратный путь. Остаѐтся только блочное обратное ребро состоящее из вершин $\langle x_{19}, x_3 \rangle$. Наконец, обратный путь $s_6 = \langle x_9, x_{18}, x_1, x_2 \rangle$ имеет последовательность вершин $\langle x_9, x_{18} \rangle$ уже включѐнную в главный обратный путь, но вершины x_1 и x_2 не включены в главный обратный путь. Поэтому формируем частичный обратный путь $\langle x_{18}, x_1, x_2 \rangle$ из концевой вершины x_{18} и остатка x_1, x_2 .

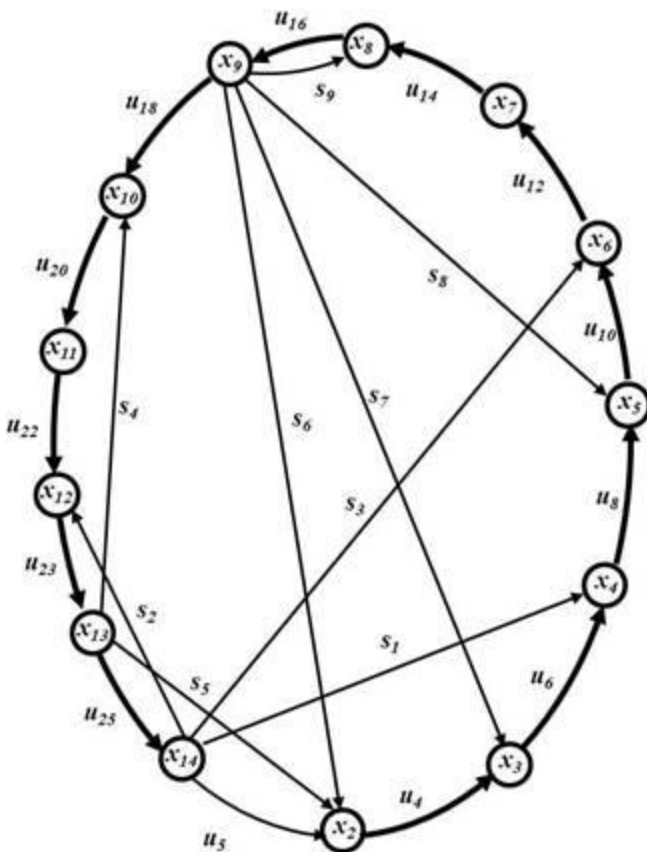


Рис. 6. Порождение обратных путей

Таким образом, можно сказать, что разбиение на блоки породило систему обратных маршрутов:

Блок B_1 $\{s_3 = \langle x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_6 \rangle$ – главный обратный путь;

$u_{24} = \langle x_{16}, x_{12} \rangle$ – блочное обратное ребро;

$u_9 = \langle x_{15}, x_4 \rangle$ – блочное обратное ребро.

Блок B_2 $\{s_5 = \langle x_{13}, x_{17}, x_1, x_2 \rangle$ – главный обратный путь;

$u_{21} = \langle x_{17}, x_{10} \rangle$ – блочное обратное ребро.

Блок B_3 $\{s_9 = \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_8 \rangle$ – главный обратный путь;

$u_{11} = \langle x_{20}, x_5 \rangle$ – блочное обратное ребро;

$u_7 = \langle x_{19}, x_3 \rangle$ – блочное обратное ребро;

$s_6 = \langle x_{18}, x_1, x_2 \rangle$ – частичный обратный путь.

И обратные рѐбра: $u_5 = \langle x_{14}, x_2 \rangle$; $u_{15} = \langle x_{11}, x_7 \rangle$.

Произведем расположение обратных маршрутов в следующем порядке: вначале разместим главные обратные пути, затем частичные обратные пути, затем блочные обратные рѐбра и, наконец, обратные рѐбра. Последовательно просматривая порядок расположения обратных маршрутов, производим их включение в обручи с дальнейшим разбиением. В нашем случае порядок расположения обратных маршрутов имеет вид: $M = \langle s_9, s_3, s_5, s_6, u_{11}, u_7, u_{24}, u_9, u_{21}, u_5, u_{13}, u_{15} \rangle$. Кортеж M будем называть *списком очередности обратных маршрутов*.

3. Построение изометрических циклов

Опорный цикл разбивает поверхность R^2 на две области: внутреннюю и внешнюю. Границы этих областей могут быть описаны двумя симметричными циклами (обручами):

$c_1 = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_2 \rangle$,

и $c_2 = \langle x_2, x_{14}, x_{13}, x_{12}, x_{11}, x_{10}, x_9, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2 \rangle$.

Определение 9. Обруч – это простой цикл, образованный кольцевой суммой изометрических циклов, каждый из которых имеет, по крайней мере, одно общее ребро с другим изометрическим циклом.

Заметим, что изометрический цикл можно рассматривать как частный случай обруча. В свою очередь, обратные ребра и обратные пути разбивают поверхности на грани, где границами граней служат обручи [8].

Применим операцию включения обратного ребра в обруч графа. Рассмотрим главный обратный путь $s_9 = \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_8 \rangle$ в порядке расположения обратных маршрутов. Концевые вершины пути x_9 и x_8 включаются и в цикл c_1 и в цикл c_2 . Учитывая то, что первый обратный маршрут может быть включен в любой цикл, выбираем цикл c_1 . Включаем обратный маршрут s_9 в состав цикла c_1 . Производим необходимое преобразование. В результате получим два новых цикла:

$$c_1: \langle x_2, x_3 \rangle + \langle x_3, x_4 \rangle + \langle x_4, x_5 \rangle + \langle x_5, x_6 \rangle + \langle x_6, x_7 \rangle + \langle x_7, x_8 \rangle + \langle x_8, x_9 \rangle + \langle x_9, x_{10} \rangle + \langle x_{10}, x_{11} \rangle + \langle x_{11}, x_{12} \rangle + \langle x_{12}, x_{13} \rangle + \langle x_{13}, x_{14} \rangle + \langle x_{14}, x_2 \rangle + \langle x_9, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_{19} \rangle + \langle x_{19}, x_{20} \rangle + \langle x_{20}, x_8 \rangle + \langle x_8, x_{20} \rangle + \langle x_{20}, x_{19} \rangle + \langle x_{19}, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_9 \rangle = \langle x_2, x_3 \rangle + \langle x_3, x_4 \rangle + \langle x_4, x_5 \rangle + \langle x_5, x_6 \rangle + \langle x_6, x_7 \rangle + \langle x_7, x_8 \rangle + \langle x_8, x_{20} \rangle + \langle x_{20}, x_{19} \rangle + \langle x_{19}, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_9 \rangle + \langle x_9, x_{10} \rangle + \langle x_{10}, x_{11} \rangle + \langle x_{11}, x_{12} \rangle + \langle x_{12}, x_{13} \rangle + \langle x_{13}, x_{14} \rangle + \langle x_{14}, x_2 \rangle + \langle x_9, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_{19} \rangle + \langle x_{19}, x_{20} \rangle + \langle x_{20}, x_8 \rangle + \langle x_8, x_9 \rangle;$$

$$c_1' = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{20}, x_{19}, x_{18}, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_2 \rangle;$$

$$c_3 = \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_8, x_9 \rangle.$$

Таким образом, система сформированных обручей имеет вид:

$$c_1' = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{20}, x_{19}, x_{18}, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_2 \rangle;$$

$$c_3 = \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_8, x_9 \rangle;$$

$$c_2 = \langle x_2, x_{14}, x_{13}, x_{12}, x_{11}, x_{10}, x_9, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2 \rangle.$$

Будем размещать главный обратный цикл $s_5 = \langle x_{13}, x_{17}, x_1, x_2 \rangle$. Концевые вершины x_2, x_{13} включаются и в цикл c_1' и в цикл c_2 . Возникла неопределенность. Тогда пробуем разместить главный об-

ратный путь $s_3 = \langle x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_6 \rangle$, обе концевые вершины x_{14}, x_6 обратного пути $s_3 = \langle x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_6 \rangle$ включаются и в цикл c_1' и в цикл c_2 . Снова возникла неопределенность. Пробуем поместить путь $s_6 = \langle x_{18}, x_1, x_2 \rangle$. Он размещается только в c_1 , так как только там имеются совместно две концевые вершины $\{x_{18}, x_2\}$. В результате получим два новых цикла:

$$c_1': \langle x_2, x_3 \rangle + \langle x_3, x_4 \rangle + \langle x_4, x_5 \rangle + \langle x_5, x_6 \rangle + \langle x_6, x_7 \rangle + \langle x_7, x_8 \rangle + \langle x_8, x_{20} \rangle + \langle x_{20}, x_{19} \rangle + \langle x_{19}, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_9 \rangle + \langle x_9, x_{10} \rangle + \langle x_{10}, x_{11} \rangle + \langle x_{11}, x_{12} \rangle + \langle x_{12}, x_{13} \rangle + \langle x_{13}, x_{14} \rangle + \langle x_{14}, x_2 \rangle + \langle x_{18}, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_1, x_{18} \rangle = \langle x_2, x_3 \rangle + \langle x_3, x_4 \rangle + \langle x_4, x_5 \rangle + \langle x_5, x_6 \rangle + \langle x_6, x_7 \rangle + \langle x_7, x_8 \rangle + \langle x_8, x_{20} \rangle + \langle x_{20}, x_{19} \rangle + \langle x_{19}, x_{18} \rangle + \langle x_{18}, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_{18}, x_9 \rangle + \langle x_9, x_{10} \rangle + \langle x_{10}, x_{11} \rangle + \langle x_{11}, x_{12} \rangle + \langle x_{12}, x_{13} \rangle + \langle x_{13}, x_{14} \rangle + \langle x_{14}, x_2 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_1, x_{18} \rangle;$$

$$c_1'' = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{20}, x_{19}, x_{18}, x_1, x_2 \rangle;$$

$$c_4 = \langle x_{18}, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_2, x_1, x_{18} \rangle.$$

Система обручей имеет вид:

$$c_1'' = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{20}, x_{19}, x_{18}, x_1, x_2 \rangle;$$

$$c_4 = \langle x_{18}, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_2, x_1, x_{18} \rangle;$$

$$c_3 = \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_8, x_9 \rangle;$$

$$c_2 = \langle x_2, x_{14}, x_{13}, x_{12}, x_{11}, x_{10}, x_9, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2 \rangle.$$

Размещаем обратный маршрут $s_3 = \langle x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_6 \rangle$ в c_2 . В результате получим два новых цикла:

$$c_2' = \langle x_{14}, x_{13}, x_{12}, x_{11}, x_{10}, x_9, x_8, x_7, x_6, x_{16}, x_{15}, x_{14} \rangle;$$

$$c_5 = \langle x_2, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2 \rangle.$$

Система обручей имеет вид:

$$c_2' = \langle x_{14}, x_{13}, x_{12}, x_{11}, x_{10}, x_9, x_8, x_7, x_6, x_{16}, x_{15}, x_{14} \rangle;$$

$$c_5 = \langle x_2, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2 \rangle;$$

$$c_1'' = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{20}, x_{19}, x_{18}, x_1, x_2 \rangle;$$

$$c_4 = \langle x_{18}, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_2, x_1, x_{18} \rangle;$$

$$c_3 = \langle x_9, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_8, x_9 \rangle.$$

Поочередно вставляем обратные маршруты сиз списка очередности в образованные обручи до полного исчерпания. Если список очередности исчерпан и все обратные маршруты уложены в обручах, то граф планарен.

В противном случае, если список очередности не исчерпан, граф непланарен.

Окончательная система изометрических циклов имеет вид:

$$C_2''' = \langle X_{12}, X_{11}, X_7, X_6, X_{16}, X_{12} \rangle \rightarrow \{U_{22}, U_{15}, U_{12}, U_{13}, U_{24}\};$$

$$C_{12} = \langle X_{11}, X_{10}, X_9, X_8, X_7, X_{11} \rangle \rightarrow \{U_{20}, U_{18}, U_{16}, U_{14}, U_{15}\};$$

$$C_1''' = \langle X_2, X_3, X_{19}, X_{18}, X_1, X_2 \rangle \rightarrow \{U_4, U_7, U_{29}, U_3, U_1\};$$

$$C_{11} = \langle X_3, X_4, X_5, X_{20}, X_{19}, X_3 \rangle \rightarrow \{U_6, U_8, U_{11}, U_{30}, U_7\};$$

$$C_{10} = \langle X_5, X_6, X_7, X_8, X_{20}, X_5 \rangle \rightarrow \{U_{10}, U_{12}, U_{14}, U_{17}, U_{11}\};$$

$$C_4'' = \langle X_{18}, X_9, X_{10}, X_{17}, X_1, X_{18} \rangle \rightarrow \{U_{19}, U_{18}, U_{21}, U_2, U_3\};$$

$$C_9 = \langle X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{17}, X_{10} \rangle \rightarrow \{U_{20}, U_{22}, U_{23}, U_{26}, U_{21}\};$$

$$C_5' = \langle X_2, X_{14}, X_{15}, X_4, X_3, X_2 \rangle \rightarrow \{U_5, U_{27}, U_9, U_6, U_4\};$$

$$C_8 = \langle X_{15}, X_{16}, X_6, X_5, X_4, X_{15} \rangle \rightarrow \{U_{28}, U_{13}, U_{10}, U_8, U_9\};$$

$$C_7 = \langle X_{14}, X_{13}, X_{12}, X_{16}, X_{15}, X_{14} \rangle \rightarrow \{U_{25}, U_{23}, U_{24}, U_{28}, U_{27}\};$$

$$C_6 = \langle X_2, X_1, X_{17}, X_{13}, X_{14}, X_2 \rangle \rightarrow \{U_1, U_2, U_{26}, U_{25}, U_5\};$$

$$C_3 = \langle X_9, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_8, X_9 \rangle \rightarrow \{U_{19}, U_{29}, U_{30}, U_{17}, U_{16}\}.$$

Так как кольцевая сумма циклов есть пустое множество, то данная система циклов характеризует топологический рисунок плоского графа [5,14]. Диаграмма вращения вершин представлена на рис. 7 [11], а топологический рисунок представлен на рис. 8.

- X1: X2 X17 X18
- X2: X3 X14 X1
- X3: X19 X4 X2
- X4: X5 X15 X3
- X5: X20 X6 X4
- X6: X7 X16 X5
- X7: X8 X11 X6
- X8: X9 X7 X20
- X9: X10 X8 X18
- X10: X9 X17 X11
- X11: X10 X12 X7
- X12: X11 X13 X16
- X13: X12 X17 X14
- X14: X15 X13 X2
- X15: X16 X14 X4
- X16: X6 X12 X15
- X17: X13 X10 X1
- X18: X9 X19 X1
- X19: X18 X20 X3
- X20: X8 X5 X19

Рис. 7. Диаграмма вращения вершин

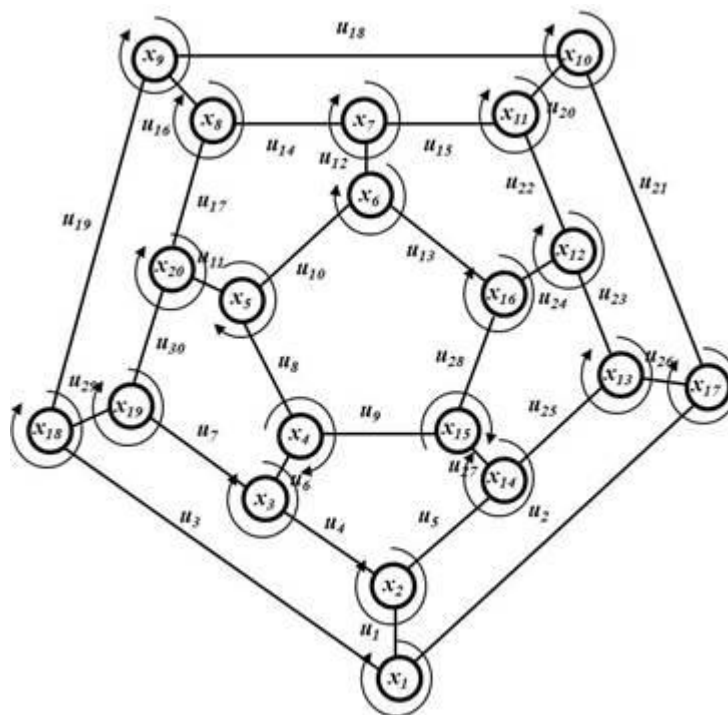


Рис. 8. Топологический рисунок графа

4. Задача выбора опорного цикла

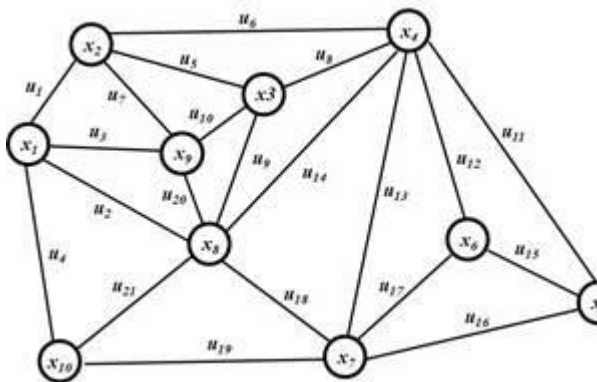


Рис. 9. Граф G_2

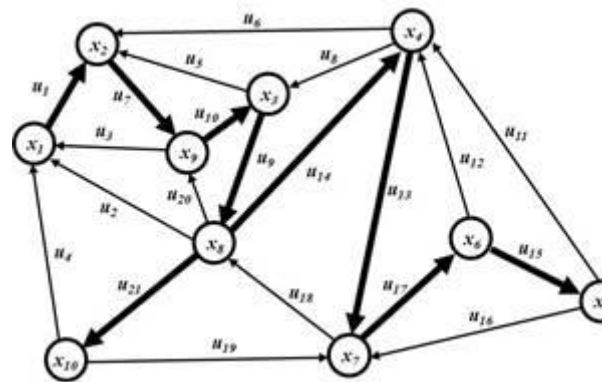


Рис. 10. DFS-дерево графа G_2

В предыдущем примере рассматривается случай удачного выбора опорного цикла. В этом случае все концевые вершины обратных маршрутов и обратных рёбер принадлежат опорному циклу. Рассмотрим случай, когда концевые вершины обратных маршрутов не принадлежат опорному циклу или обратные маршруты представляют собой замкнутые маршруты.

Рассмотрим следующий граф, представленный на рис. 9. Выделим DFS-дерево (см. рис. 10). Выберем самый длинный цикл $\langle x_1, x_2, x_9, x_3, x_8, x_{10}, x_1 \rangle$ и назовем его опорным циклом. Будем рассматривать только подматрицу π . Выделенный опорный цикл разбивает подматрицу π на две части. Ветви дерева, вошедшие в опорный цикл, образуют подмножество R_1 . Ветви дерева, не вошедшие в опорный цикл – подмножество R_2 (серый цвет). Так как построение дерева определяет ориентированный граф, то в качестве элементов подматрицы будут выступать и ориентированные рёбра.

	ветви дерева (подматрица π)									
	$\langle x_1, x_2 \rangle$	$\langle x_2, x_9 \rangle$	$\langle x_9, x_3 \rangle$	$\langle x_3, x_8 \rangle$	$\langle x_8, x_{10} \rangle$	$\langle x_8, x_4 \rangle$	$\langle x_4, x_7 \rangle$	$\langle x_7, x_6 \rangle$	$\langle x_6, x_5 \rangle$	
	u_1	u_7	u_{10}	u_9	u_{21}	u_{14}	u_{13}	u_{17}	u_{15}	
$u_2 = \langle x_8, x_1 \rangle$	1	1	1	1						
$u_3 = \langle x_9, x_1 \rangle$	1	1								
$u_4 = \langle x_{10}, x_1 \rangle$	1	1	1	1	1					
$u_5 = \langle x_3, x_2 \rangle$		1	1							
$u_6 = \langle x_4, x_2 \rangle$		1	1	1		1				
$u_8 = \langle x_4, x_3 \rangle$				1		1				
$u_{11} = \langle x_5, x_4 \rangle$							1	1	1	
$u_{12} = \langle x_6, x_4 \rangle$							1	1		
$u_{16} = \langle x_5, x_7 \rangle$								1	1	
$u_{18} = \langle x_7, x_8 \rangle$						1	1			
$u_{19} = \langle x_7, x_{10} \rangle$					1	1	1			
$u_{20} = \langle x_8, x_9 \rangle$			1	1						

Будем строить обратные пути. С этой целью выпишем все фундаментальные циклы в виде множества ребер:

$$C_1 = \{u_2, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_7}, \mathbf{u_{10}}, \mathbf{u_9}\}; C_2 = \{u_3, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_7}\}; C_3 = \{u_4, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_7}, \mathbf{u_{10}}, \mathbf{u_9}, \mathbf{u_{21}}\}; C_4 = \{u_5, \mathbf{u_7}, \mathbf{u_{10}}\};$$

$$C_5 = \{u_6, \mathbf{u_7}, \mathbf{u_{10}}, \mathbf{u_9}, u_{14}\}; C_6 = \{u_8, \mathbf{u_9}, u_{14}\}; C_7 = \{u_{11}, u_{13}, u_{17}, u_{15}\}; C_8 = \{u_{12}, u_{13}, u_{17}\};$$

$$C_9 = \{u_{16}, u_{17}, u_{15}\}; C_{10} = \{u_{18}, u_{14}, u_{13}\}; C_{11} = \{u_{19}, \mathbf{u_{21}}, u_{14}, u_{13}\}; C_{12} = \{u_{20}, \mathbf{u_{10}}, \mathbf{u_9}\}.$$

Курсивом выделены хорды, жирным шрифтом выделены рёбра дерева, вошедшие в опорный цикл, простым шрифтом – рёбра дерева, не вошедшие в опорный цикл. Исключим из описания циклов рёбра, вошедшие в опорный цикл. Получим следующие части циклов:

$$S_1 = \{u_2\}; S_2 = \{u_3\}; S_3 - \text{опорный цикл}; S_4 = \{u_5\};$$

$$S_5 = \{u_6, u_{14}\}; S_6 = \{u_8, u_{14}\}; S_7 = \{u_{11}, u_{13}, u_{17}, u_{15}\}; S_8 = \{u_{12}, u_{13}, u_{17}\};$$

$$S_9 = \{u_{16}, u_{17}, u_{15}\}; S_{10} = \{u_{18}, u_{14}, u_{13}\}; S_{11} = \{u_{19}, u_{14}, u_{13}\}; S_{12} = \{u_{20}\}.$$

Запишем полученные части циклов как обратные рёбра в виде ориентированных маршрутов:

$$S_1 = \{u_2\} \rightarrow \langle X_8, X_1 \rangle; S_2 = \{u_3\} \rightarrow \langle X_9, X_1 \rangle; S_4 = \{u_5\} \rightarrow \langle X_3, X_2 \rangle;$$

$$S_5 = \{u_6, u_{14}\} \rightarrow \langle X_4, X_2 \rangle + \langle X_8, X_4 \rangle = \langle X_8, X_4, X_2 \rangle;$$

$$S_6 = \{u_8, u_{14}\} \rightarrow \langle X_4, X_3 \rangle + \langle X_8, X_4 \rangle = \langle X_8, X_4, X_3 \rangle;$$

$$S_7 = \{u_{11}, u_{13}, u_{17}, u_{15}\} \rightarrow \langle X_5, X_4 \rangle + \langle X_4, X_7 \rangle + \langle X_7, X_6 \rangle + \langle X_6, X_5 \rangle = \langle X_5, X_4, X_7, X_6, X_5 \rangle;$$

$$S_8 = \{u_{12}, u_{13}, u_{17}\} \rightarrow \langle X_6, X_4 \rangle + \langle X_4, X_7 \rangle + \langle X_7, X_6 \rangle = \langle X_6, X_4, X_7, X_6 \rangle;$$

$$S_9 = \{u_{16}, u_{17}, u_{15}\} \rightarrow \langle X_5, X_7 \rangle + \langle X_7, X_6 \rangle + \langle X_6, X_5 \rangle = \langle X_5, X_7, X_6, X_5 \rangle;$$

$$S_{10} = \{u_{18}, u_{14}, u_{13}\} \rightarrow \langle X_7, X_8 \rangle + \langle X_8, X_4 \rangle + \langle X_4, X_7 \rangle = \langle X_7, X_8, X_4, X_7 \rangle;$$

$$S_{11} = \{u_{19}, u_{14}, u_{13}\} \rightarrow \langle X_8, X_4 \rangle + \langle X_4, X_7 \rangle + \langle X_7, X_{10} \rangle + \langle X_8, X_4, X_7, X_{10} \rangle;$$

$$S_{12} = \{u_{20}\} \rightarrow \langle X_8, X_9 \rangle.$$

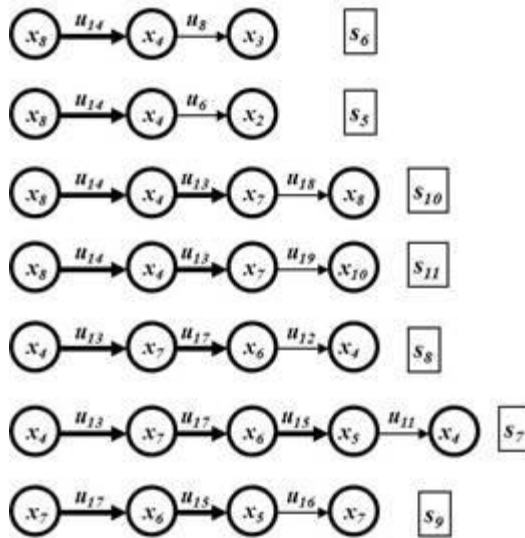


Рис. 11. Построение обратных путей для выбранного опорного цикла

Так как при построении топологического рисунка существование обратных путей в виде замкнутых маршрутов невозможно по определению, будем проводить дальнейшие преобразования, увеличивая длину опорного цикла.

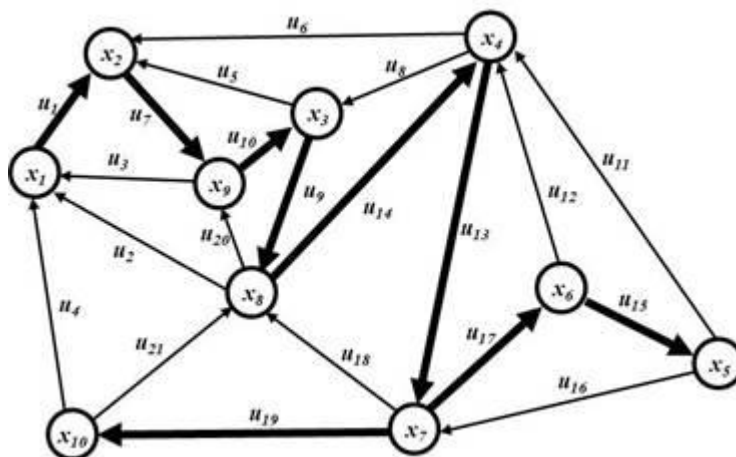


Рис. 12. Новое DFS-дерево графа G_2 и новый опорный цикл

Для преобразования ищем единственный элемент в строке подматрицы R_1 . Такая подстрока имеется – это хорда u_{19} . Выбираем обратный маршрут s_{11} , так как в нем количество ветвей дерева, не вошедших в опорный цикл больше, чем в других случаях. Производим преобразования в подматрице π . Объявляем хорду u_{19} ребром дерева, принадлежащим опорному циклу, и включаем в подматрицу π , а ребро дерева u_{21} объявляем хордой и исключаем из подматрицы π . Ветви дерева u_{13} и u_{14} включаем в опорный цикл. Тем самым преобразуем DFS-дерево графа G_2 (см. рис. 12).

Для нового дерева построим подматрицу π :

	ветви дерева (подматрица π)								
	$\langle x_1, x_2 \rangle$	$\langle x_2, x_9 \rangle$	$\langle x_9, x_3 \rangle$	$\langle x_3, x_8 \rangle$	$\langle x_8, x_4 \rangle$	$\langle x_4, x_7 \rangle$	$\langle x_7, x_{10} \rangle$	$\langle x_7, x_6 \rangle$	$\langle x_6, x_5 \rangle$
	u_1	u_7	u_{10}	u_9	u_{14}	u_{13}	u_{19}	u_{17}	u_{15}
$u_2 = \langle x_8, x_1 \rangle$	1	1	1	1					
$u_3 = \langle x_9, x_1 \rangle$	1	1							
$u_4 = \langle x_{10}, x_1 \rangle$	1	1	1	1	1	1	1		
$u_5 = \langle x_3, x_2 \rangle$		1	1						
$u_6 = \langle x_4, x_2 \rangle$		1	1	1	1				
$u_8 = \langle x_4, x_3 \rangle$				1	1				
$u_{11} = \langle x_5, x_4 \rangle$						1		1	1
$u_{12} = \langle x_6, x_4 \rangle$						1		1	
$u_{16} = \langle x_5, x_7 \rangle$								1	1
$u_{18} = \langle x_7, x_8 \rangle$					1	1			
$u_{21} = \langle x_{10}, x_8 \rangle$					1	1	1		
$u_{20} = \langle x_8, x_9 \rangle$			1	1					

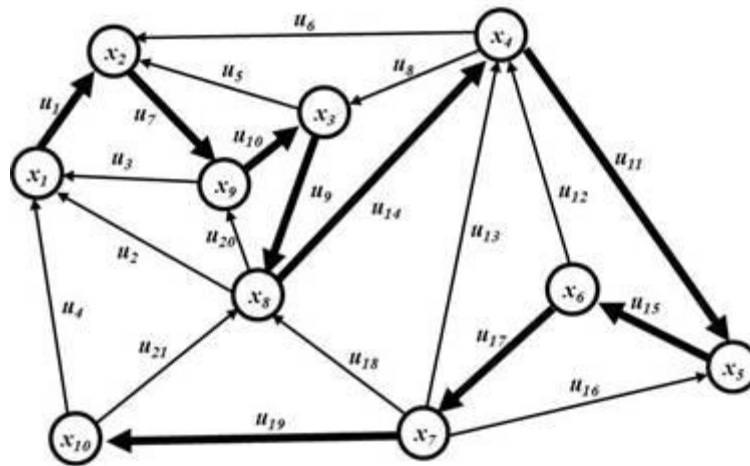


Рис. 13. Новое DFS-дерево и новый опорный цикл

Продолжим увеличивать длину опорного цикла. Для преобразования выбираем обратный маршрут характеризующийся строкой матрицы с хордой u_{11} , так как в ней имеется единственный элемент в подматрице R_1 и количество ветвей дерева не вошедших в опорный цикл больше, чем в других случаях. Производим преобразования в подматрице π . Объявляем хорду u_{11} ребром дерева, принадлежащим опорному циклу, и включаем в подматрицу π , а ребро дерева u_{13} объявляем хордой и исключаем из подматрицы π . Ветви дерева u_{15} и u_{17} включаем в опорный цикл, изменяя ориентацию. Тем самым преобразуем DFS-дерево графа G_2 (см. рис. 13).

Окончательно подматрица π принимает вид:

	ветви дерева (подматрица π)								
	$\langle x_1, x_2 \rangle$	$\langle x_2, x_9 \rangle$	$\langle x_9, x_3 \rangle$	$\langle x_3, x_8 \rangle$	$\langle x_8, x_4 \rangle$	$\langle x_4, x_5 \rangle$	$\langle x_5, x_6 \rangle$	$\langle x_6, x_7 \rangle$	$\langle x_7, x_{10} \rangle$
	u_1	u_7	u_{10}	u_9	u_{14}	u_{11}	u_{15}	u_{17}	u_{19}
$u_2 = \langle x_8, x_1 \rangle$	1	1	1	1					
$u_3 = \langle x_9, x_1 \rangle$	1	1							
$u_4 = \langle x_{10}, x_1 \rangle$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$u_5 = \langle x_3, x_2 \rangle$		1	1	1					
$u_6 = \langle x_4, x_2 \rangle$		1	1	1	1				
$u_8 = \langle x_4, x_3 \rangle$				1	1				
$u_{13} = \langle x_7, x_4 \rangle$						1	1	1	
$u_{12} = \langle x_6, x_4 \rangle$						1	1		
$u_{16} = \langle x_7, x_5 \rangle$							1	1	
$u_{18} = \langle x_7, x_8 \rangle$					1	1	1	1	
$u_{21} = \langle x_{10}, x_8 \rangle$					1	1	1	1	1
$u_{20} = \langle x_8, x_9 \rangle$			1	1					

В результате получаем множество, состоящее только из обратных рёбер.

Формируем множество обратных рёбер:

$$\begin{aligned} \{u_2\} &\rightarrow \langle x_8, x_1 \rangle; \{u_3\} \rightarrow \langle x_9, x_1 \rangle; \\ \{u_5\} &\rightarrow \langle x_3, x_2 \rangle; \\ \{u_6\} &\rightarrow \langle x_4, x_2 \rangle; \{u_8\} \rightarrow \langle x_4, x_3 \rangle; \\ \{u_{13}\} &\rightarrow \langle x_7, x_4 \rangle; \{u_{12}\} \rightarrow \langle x_6, x_4 \rangle; \\ \{u_{16}\} &\rightarrow \langle x_7, x_5 \rangle; \{u_{18}\} \rightarrow \langle x_7, x_8 \rangle; \\ \{u_{20}\} &\rightarrow \langle x_8, x_9 \rangle; \{u_{21}\} \rightarrow \langle x_{10}, x_8 \rangle. \end{aligned}$$

Будем формировать изометрические циклы графа, встраивая обратные рёбра в обручи (циклы).

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle x_1, x_2, x_9, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_1 \rangle; \\ C_2 &= \langle x_1, x_{10}, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_9, x_2, x_1 \rangle \end{aligned}$$

Вставим в цикл C_1 обратное ребро $\{u_2\} \rightarrow \langle x_8, x_1 \rangle$.

$$\begin{aligned} C_1: & \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_9 \rangle + \langle x_9, x_3 \rangle + \\ & + \langle x_3, x_4 \rangle + \langle x_4, x_5 \rangle + \langle x_5, x_6 \rangle + \langle x_6, x_7 \rangle + \\ & + \langle x_7, x_8 \rangle + \langle x_8, x_{10} \rangle + \langle x_{10}, x_1 \rangle + \langle x_8, x_1 \rangle + \\ & + \langle x_1, x_8 \rangle = (\langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_9 \rangle + \langle x_9, x_3 \rangle + \\ & + \langle x_3, x_4 \rangle + \langle x_4, x_5 \rangle + \langle x_5, x_6 \rangle + \langle x_6, x_7 \rangle + \\ & + \langle x_7, x_8 \rangle + \langle x_8, x_1 \rangle) + (\langle x_8, x_{10} \rangle + \\ & + \langle x_{10}, x_1 \rangle + \langle x_1, x_8 \rangle). \end{aligned}$$

Образуются два новых обруча:

$$\begin{aligned} C_1' &= \langle x_1, x_2, x_9, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_1 \rangle; \\ C_3 &= \langle x_8, x_{10}, x_1, x_8 \rangle. \end{aligned}$$

Система обручей имеет вид:

$$\begin{aligned} C_1' &= \langle x_1, x_2, x_9, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_1 \rangle; \\ C_2 &= \langle x_1, x_{10}, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_9, x_2, x_1 \rangle; \\ C_3 &= \langle x_8, x_{10}, x_1, x_8 \rangle. \end{aligned}$$

Продолжаем процесс введения обратных рёбер до полного их исчерпания. Окончательно система обручей имеет вид:

$$\begin{aligned} C_1'''' &= \langle x_6, x_7, x_8, x_4, x_6 \rangle; \\ C_2'''' &= \langle x_4, x_2, x_1, x_{10}, x_7, x_4 \rangle; \\ C_3 &= \langle x_8, x_{10}, x_1, x_8 \rangle; \\ C_4 &= \langle x_8, x_7, x_{10}, x_8 \rangle; \\ C_5' &= \langle x_1, x_2, x_9, x_1 \rangle; \\ C_6 &= \langle x_3, x_9, x_2, x_3 \rangle; \\ C_7 &= \langle x_9, x_8, x_1, x_9 \rangle; \\ C_8 &= \langle x_4, x_3, x_2, x_4 \rangle; \\ C_9 &= \langle x_9, x_3, x_8, x_9 \rangle; \\ C_{10} &= \langle x_8, x_3, x_4, x_8 \rangle; \\ C_{11}' &= \langle x_7, x_6, x_5, x_7 \rangle; \\ C_{12} &= \langle x_4, x_5, x_6, x_4 \rangle; \\ C_{13} &= \langle x_5, x_4, x_7, x_5 \rangle. \end{aligned}$$

В результате получен плоский топологический рисунок графа G_2 состоящий из изометрических циклов (см. рис. 14).

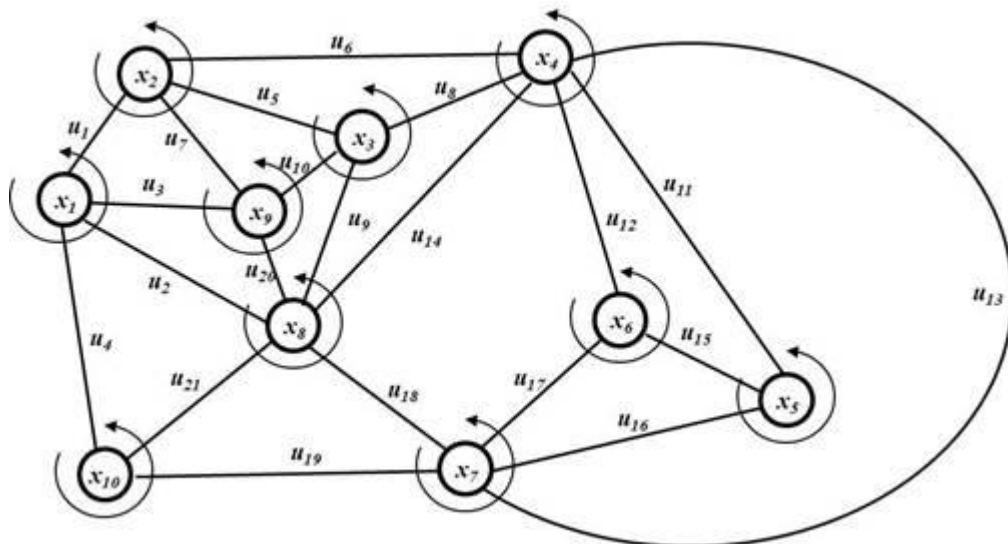


Рис. 14. Топологический рисунок графа G_2 .

5. Обоснование алгоритма

Обоснование алгоритма основано на следствии теоремы Маклейна вытека-

ющей из построения топологического рисунка графа.

Следствие 1. В плоском топологическом рисунке несепабельного графа по ребрам маршрута, соединяющего две вершины, принадлежащие простому

циклу, проходят два простых цикла, образованные кольцевой суммой циклов, принадлежащих инцидентным ребрам внутренних вершин.

Доказательство. Проведение такого маршрута разбивает выделенный цикл на две части. Тогда, исходя из теоремы Маклейна и как следствие построения топологического рисунка кольцевая

сумма циклов, проходящих по инцидентным ребрам внутренних вершин, для каждой части разбиения, формирует два простых цикла проходящих по ребрам маршрута. В случае отсутствия внутренних вершин, происходит кольцевое суммирование частей выделенного цикла и ребер маршрута.

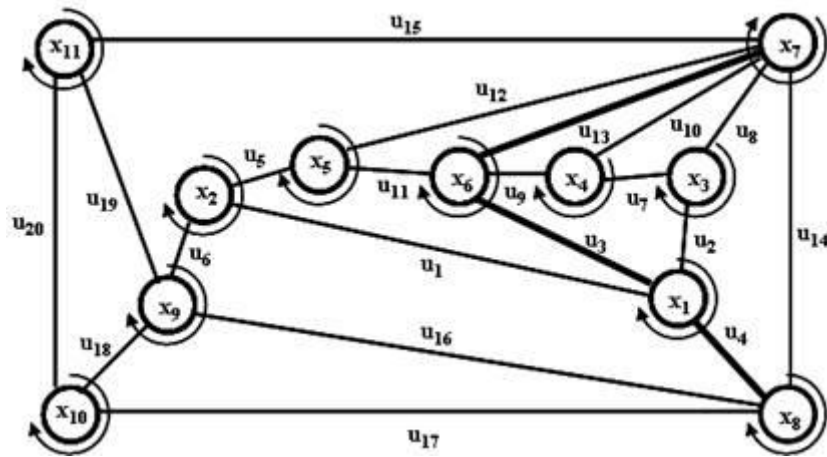


Рис. 15. Топологический рисунок плоского графа.

Например, для топологического рисунка графа, представленного на рис.15, вращение вершин описывается диаграммой:

- X1: u_3, u_2, u_4, u_1
- X2: u_6, u_5, u_5
- X3: u_8, u_2, u_7
- X4: u_{13}, u_7, u_9
- X5: u_{12}, u_{11}, u_5
- X6: u_{11}, u_{13}, u_9, u_3
- X7: $u_{15}, u_{14}, u_8, u_{10}, u_{13}, u_{12}$
- X8: $u_4, u_{14}, u_{17}, u_{16}$
- X9: $u_{19}, u_6, u_{16}, u_{18}$
- X10: u_{20}, u_{18}, u_{17}
- X11: u_{15}, u_{19}, u_{20}

Множество изометрических циклов и обод:

- $c_1 = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\}; c_2 = \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\};$
- $c_3 = \{u_2, u_3, u_7, u_9\}; c_4 = \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\};$
- $c_5 = \{u_5, u_6, u_{12}, u_{15}, u_{19}\}; c_6 = \{u_7, u_8, u_{10}\};$
- $c_7 = \{u_9, u_{10}, u_{13}\}; c_8 = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\};$
- $c_9 = \{u_{16}, u_{17}, u_{18}\}; c_{10} = \{u_{18}, u_{19}, u_{20}\};$
- $c_0 = \{u_{14}, u_{15}, u_{17}, u_{20}\}.$

Выделим цикл $\{u_{14}, u_{15}, u_{17}, u_{20}\}$. Проведем разрезающий маршрут $\langle u_3, u_4, u_{13} \rangle$ вершины которого x_7 и x_8 принадлежат циклу. Тогда подмножество вершин $\{x_2, x_5, x_9\}$ характеризует внутренность

левой части, а подмножество вершин $\{x_3, x_4\}$ характеризует внутренность правой части. В свою очередь инцидентные ребра левой части графа образуют подмножество $\{u_1, u_5, u_6, u_{11}, u_{12}, u_{16}, u_{18}, u_{19}\}$, а инцидентные ребра для правой части образуют подмножество $\{u_2, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$. Соответственно подмножество циклов $\{c_1, c_2, c_5, c_8, c_9, c_{10}\}$ характеризует левую часть, а подмножество $\{c_3, c_4, c_6, c_7\}$ характеризует правую часть. Тогда можно сформировать два цикла проходящих по ребрам маршрут и части выделенного цикла:

$$c_1 \oplus c_2 \oplus c_5 \oplus c_8 \oplus c_9 \oplus c_{10} = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_1, u_4, u_6, u_{16}\} \oplus \{u_5, u_6, u_{12}, u_{15}, u_{19}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}\} \oplus \{u_{16}, u_{17}, u_{18}\} \oplus \{u_{18}, u_{19}, u_{20}\} = \{u_3, u_4, u_{15}, u_{13}, u_{17}, u_{20}\};$$

$$c_3 \oplus c_4 \oplus c_6 \oplus c_7 = \{u_2, u_3, u_7, u_9\} \oplus \{u_2, u_4, u_8, u_{14}\} \oplus \{u_7, u_8, u_{10}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{13}\} = \{u_3, u_4, u_{13}, u_{14}\}.$$

Следствие создает основу для создания рекурсивного процесса построения топологического рисунка графа. С этой целью выделяется простой цикл и проводится маршрут между его вершинами, разрезающий выделенный цикл на два

цикла меньшей длины принадлежащими данному маршруту. Процесс определяется и управляется выделенным деревом графа и продолжается рекурсивно до появления изометрических циклов. В свою очередь выделенные циклы индуцируют (порождают) вращение его вершин и определяют плоский топологический рисунок графа.

6. Алгоритм удлинения опорного цикла

Опишем алгоритм удлинения опорного цикла.

шаг 1. [Выбор максимального по длине цикла]. Строим матрицу фундаментальных циклов графа. Выбираем максимальный по длине цикл.

шаг 2. [Построение обратных маршрутов]. Формируем обратные маршруты графа. Для этого объединяем ветви дерева, не включенные в опорный цикл и соответствующую хорду.

шаг 3. [Проверка обратных маршрутов на замкнутость]. Проверяем обратные пути на замкнутость и соответствие концевых вершин опорному циклу. Если таких обратных путей нет, конец работы алгоритма.

шаг 4. [Построение нового опорного цикла]. Находим обратный маршрут, у которого количество ветвей дерева не вошедших в опорный цикл превышает количество вошедших. Одну из ветвей дерева входящих в опорный цикл объявляем хордой, а хорду данного обратного маршрута объявляем ветвью дерева, входящей в опорный цикл. Включаем ветви дерева данного обратного маршрута, не входящие в опорный цикл во множество ветвей дерева, входящих в опорный цикл с возможной их переориентацией. В случае необходимости переориентируем обратные ветви, иначе – окончательный опорный цикл выбран; конец работы алгоритма.

шаг 5. [Построение новой матрицы фундаментальных циклов]. Строим новое DFS-дерево и новую матрицу фундаментальных циклов графа и идем на шаг 4.

Конец алгоритма.

В общем случае, количество операций для выделения дерева графа поиском в глубину определяется величиной равной рангу графа $\rho(G) = n - 1$ и не может быть больше количества ребер в графе [18]. Поэтому вычислительная сложность данного алгоритма может быть описана как $f_1(m) = O(m)$.

7. Алгоритм метода нитей

Маршрут, начало и конец которого принадлежат различным вершинам, будем называть *нитью*. Тогда проведение маршрута (нити) разбивает цикл, в составе которого находятся вершины характеризующие начало и конец маршрута, на два цикла меньшей длины, при этом удовлетворяется критерий планарности Маклейна. Невозможность проведения нити означает, что вершины характеризующие начало и конец маршрута принадлежат не одному циклу, а разным. Данный процесс и является обоснованием применения метода нитей для проверки графа на планарность.

Опишем алгоритм проверки графа на планарность методом нитей.

шаг 1. [Построение DFS-дерева]. Методом поиска в глубину строим DFS-дерево графа.

шаг 2. [Выбор опорного цикла]. Строим матрицу фундаментальных циклов графа и выбираем опорный цикл.

шаг 3. [Формирование обратных путей]. Формируем обратные пути графа относительно выбранного опорного цикла. Для этого объединяем не включенные в опорный цикл ветви дерева и соответствующую хорду. Если концевые вершины сформированных обратных путей не принадлежат опорному циклу и имеются обратные пути в виде замкнутых маршрутов, то производим удлинение опорного цикла и идем на шаг 2.

шаг 4. [Построение блоков обратных путей]. Обратные пути, имеющие одинаковые вершины в качестве истока, объединяем в блоки. Ранжируем обратные маршруты в блоках.

шаг 5. [Включение обратных маршрутов в облучи графа]. Последовательно подключаем обратные маршруты в облучи графа согласно рангу. При подключении образуем новые облучи графа.

шаг 6. [Построение системы изометрических циклов и топологического рисунка плоского графа]. В результате построения, если подключены все обратные пути и обратные рёбра, получаем систему изометрических циклов графа. Строим диаграмму вращения вершин. Если имеются неподключенные обратные маршруты, то граф непланарен.

Конец алгоритма.

В свою очередь, количество последовательно подключаемых обратных маршрутов (нитей) не может быть больше, чем количество рёбер графа. Поэтому вычислительную сложность алгоритма включения обратных маршрутов можно определить как $f_2(m) = O(m)$.

Последовательное применение алгоритмов можно оценить как аддитивную сумму их вычислительных сложностей $f_1(m) + f_2(m) = O(m)$.

8. Оценка сложности метода

Исходной информацией для проведения расчетов служит связанный список вершин графа (аналог матрицы смежностей графа без учета нулевых элементов) и количество ребер m .

Процесс построения такого списка состоит из перечисления всех ребер графа представленных в виде $u_k = (x_i, x_j) \vee (x_j, x_i)$, $k \in \{1, \dots, m\}$ с записью текущего номера ребра в ячейку соответствующую записи вершин (x_i, x_j) для прямого ребра, и в ячейку соответствующую записи вершин (x_j, x_i) для обратного ребра. Вычислительная сложность процесса может быть представлена как функция $f_1 = m$. В крайнем случае, $m = n(n-1)/2$ и тогда вычислительная сложность данного процесса определяется как $O(n^2)$.

Трудоёмкость процесса выделения DFS-дерева можно определить как перечисление всех вершин $x \in X$ для неот-

крытых вершин, и первое, что она делает – это помечает переданную в качестве параметра вершину. Но для каждой вершины осуществляется просмотр и проверка на смежность всех остальных вершин. Вычислительная сложность процесса может быть представлена как функция $f_2 = n \times n = n^2$. Итого $O(n^2)$, где n – количество вершин в графе. Параллельно определяются хорды и ветви дерева.

Процесс построения фундаментальной подматрицы циклов π относительно множества хорд $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{m-n+1}\}$ осуществляется процедурой поиска в ширину для каждой хорды (число которых равно цикломатическому числу графа) на ациклическом подграфе, состоящем только из ветвей дерева, и определением пути между двумя вершинами. Вычислительная сложность процесса может быть представлена функцией $f_3 = (m-n+1)n = mn - n^2 + n$. В наихудшем случае, $m = n(n-1)/2$, тогда $f_3 = (n^3 - 3n^2)/2 + n$. Итого $O(n^3)$.

Задача выделения опорного цикла состоит из операции определения количества ребер в каждом цикле и выборе максимального по длине цикла. Длина максимально возможного цикла может быть определена как ранг графа $(n-1)$. Вычислительная сложность процесса может быть представлена функцией $f_4 = (m - n + 1)(n - 1) = m(n - 1) - n^2 + 2n - 1$. В крайнем случае, $m = n(n-1)/2$, тогда $f_4 = (n^3 - 4n^2 + 5n - 2)/2$. Итого $O(n^3)$.

Процесс разделения элементов подматрицы π на ветви дерева, принадлежащие и не принадлежащие опорному циклу, касается всех элементов подматрицы циклов, число которых может быть определено как $(m-n+1)(n-1)$. Параллельно с этим определяется количество ветвей дерева принадлежащих и не принадлежащих опорному циклу, проходящему по данной хорде. Тогда вычислительную сложность процесса можно представить функцией $f_5 = (m-n+1)(n-1) = m(n - 1) - n^2 + 2n - 1 = (n^3 - 4n^2 + 5n - 2)/2$. Итого $O(n^3)$.

Увеличение длины опорного цикла приводит к преобразованию всех эле-

ментов подматрицы циклов π и добавлению к ней элементов. Общее число преобразуемых элементов может быть определено как $(m-n+1)(n-1)$. Но так как операция увеличения длины опорного цикла производится для всех циклов, число которых равно количеству хорд графа, то выражение $(m-n+1)(n-1)$ нужно умножить на величину $(m-n+1)$. Тогда вычислительную сложность процесса можно представить функцией $f_6 = (m-n+1)(m-n+1)(n-1) = (n^5-7n^4+19n^3-25n^2+16n-4)/4$. Итого $O(n^5)$.

Формирование обратных ветвей и блоков обратных ветвей может быть произведено для множества хорд графа, количество которых равно числу $m-n+1$. Параллельно определяем общие вершины для обратных маршрутов, входящих в блок. Тогда вычислительную сложность процесса можно представить функцией $f_7 = (m-n+1) = (n^2-3n+2)/2$. Итого $O(n^2)$.

Вычислительный процесс формирования множества изометрических циклов начинается с записи опорного цикла в виде последовательности ориентированных ребер для соответствующей хорды с последовательным порядком подключения входящих ветвей дерева. В результате формируется запись цикла в векторном виде. Для формирования другого цикла производится запись векторов цикла в обратном порядке. Очевидно, что функцию вычислительной сложности можно записать как $f_8=2(n-1)$. Итого $O(n)$.

Дальнейшее формирование изометрических циклов производится путем выбора единственного из вновь образованных циклов, содержащего концевые вершины обратного маршрута. Количество вновь образованных циклов не может превышать цикломатическое число графа и в худшем случае равно ему. Далее выбранный цикл разбивается на две части относительно концевых вершин с подключением соответствующих ориентированных обратных маршрутов. Число просматриваемых при этом ориентированных ребер можно определить, как $2(n-1)$. Параллельно определяется количество обратных маршрутов, еще

не участвовавших в процессе формирования изометрических циклов. В конце расчета, если количество оставшихся обратных маршрутов не равно нулю, делается вывод о том, что исходный граф не планарный. Учитывая, что количество изометрических циклов равно цикломатическому числу графа, то вычислительную сложность процесса можно представить функцией $f_9 = (m-n+1)(m-n+1)(n-1) = (n^5-7n^4+19n^3-25n^2+16n-4)/4$. Итого $O(n^5)$.

Вычислительный процесс построения диаграммы вращения вершин, характеризующей топологический рисунок графа, заключается в последовательном просмотре всех ориентированных ребер в изометрическом цикле или ободке и записью для каждой вершины смежной вершины соответствующего ориентированного ребра. Вычислительную сложность алгоритма можно представить функцией $f_{10} = (m-n+2)(n-1) = (n^3-4n^2+7n-4)/2$. Итого $O(n^3)$.

Общую вычислительную сложность алгоритма можно представить аддитивным сложением всех вычислительных

сложностей процедур $f = \sum_{k=1}^{10} f_k$. Данная функция позволяет оценить общую вычислительную сложность алгоритма как $O(n^5)$.

Заключение

В данной работе рассматривается модифицированный алгоритм проверки графа на планарность с одновременным построением математических структур для описания топологического рисунка плоского графа. Основой расчета является выделение DFS-дерева графа. Затем производится выделение опорного цикла, который производит разбиение поверхности R^2 на внутреннюю и внешнюю области. Выделенное дерево позволяет построить фундаментальную матрицу циклов. В свою очередь, выделение опорного цикла разбивает подматрицу π фундаментальной матрицы циклов на две подматрицы: с ветвями дерева входящими, и с ветвями дерева не входящими в опорный цикл. Под-

матрица, состоящая только из ветвей дерева не вошедших в опорный цикл, позволяет формировать обратные маршруты. В случае существования обратных замкнутых маршрутов и обратных маршрутов с концевыми вершинами, не принадлежащими опорному циклу, алгоритмом удлинения опорного цикла строится новый опорный цикл, что порождает новое построение DFS-дерева графа и новую фундаментальную матрицу циклов. В случае отсутствия обратных замкнутых маршрутов и обратных маршрутов с концевыми вершинами, не принадлежащими опорному циклу, производится объединение обратных маршрутов в блоки и их ранжирование. Обратные маршруты последовательно просматриваются согласно их рангу, и в случае, если их концевые вершины принадлежат единственному обручу, производится размещение данного обратного маршрута с разбиением данного обруча на два обруча меньшей длины. Процесс продолжается рекурсивно до полного исчерпания списка обратных маршрутов. В этом случае граф планарен. Если список обратных маршрутов не исчерпан, то граф не планарен. Вычислительная сложность алгоритма оценивается как $O(n^5)$. Полученная система изометрических циклов графа индуцирует вращение вершин для описания топологического рисунка плоского графа. Топологический рисунок плоской части графа позволяет описывать процесс планаризации алгебраическими методами, не производя никаких геометрических построений на плоскости. Получение вращения вершин графа сразу решает две важнейшие задачи теории графов: задачу проверки графа на планарность и задачу построения топологического рисунка плоского графа.

В работах [5-7] нами показано, что задачу построения рисунка непланарного графа можно свести к задаче построения рисунка плоского графа с учетом введения дополнительных вершин характеризующих пересечение рёбер. Естественно, что применение этого подхода требует решения таких задач те-

рии графов как проверка планарности графа, выделение максимально плоского суграфа, определение толщины графа, получение графа с минимальным количеством пересечений и т.д. Таким образом, на первый план по важности решения выдвигается задача визуализации плоского рисунка графа. Эта задача решается в два этапа: задаётся топологический рисунок плоского графа и производится геометрическое расположение вершин и рёбер, так чтобы не нарушить структуру топологического рисунка графа.

Список литературы

1. З. В. Апанович. От рисования графов к визуализации информации. Новосибирск, РАН, 2007. – 24 с.;
2. G. Di Battista. Algorithms for Drawing Graphs: an Annotated Bibliography / G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, I.G. Tollis // *Comp. Geom., Theory and Appl.* – 1994. – N 4. – P. 235–282.
3. R. Tamassia. Handbook of Graph Drawing and Visualization. C&H/CRC – 2013. – 844 p.
4. В. Н. Касьянов, В. А. Евстигнеев. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.;
5. С. В. Курапов, А. В. Толлок. Методы построения топологического рисунка графа // *Автоматика и телемеханика.* 2013. №9. С.78–97; англ. пер.: S. V. Kurapov, A. V. Tollok. The topological drawing of a graph: Construction methods // *Autom. Remote Control.* 2013. Vol. 74, Issue 9. – P. 1494–1509.
6. С. В. Курапов, М. В. Давидовский. Два подхода к проведению соединений в плоских конструктивах. Компоненты и технологии. 2015. № 7. С. 142–147;
7. С. В. Курапов, М. В. Давидовский. Топологический подход к проведению соединений в плоских кон-

- структивах. Компоненты и технологии. 2015. № 11. С. 127–130;
8. С. В. Курапов, М. В. Давидовский. Проверка планарности и построение топологического рисунка плоского графа (поиском в глубину) // ПДМ. 2016. №2(32). С.100–115.
 9. T. Kavitha, C. Liebchen, K. Mehlhorn, D. Michail, et al. Cycle bases in graphs – characterization, algorithms, complexity, and applications // Comput. Sci. Rev. 2009. No.3. P.199–243.
 10. М. Деза. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. / М. Деза, В. Гришухин, А.И. Штогрин – М.: МЦНМО, 2007. – 192 с.;
 11. Г. Рингель. Теорема о раскраске карт. / Г. Рингель – М.: Мир. – 1977. – 126 с.;
 12. M. Patrignani. Planarity testing and embedding. Chapter 1. Handbook of Graph Drawing and Visualization. Roberto Tamassia, Editor. CRC Press. June 24, 2013. – P.1–42.
 13. Дж.Е., Хопкрофт, Р.Е. Тарьян. Изоморфизм планарных графов / Дж.Е. Хопкрофт, Р.Е. Тарьян // В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 12. – 1975. – С.39–61;
 14. С. Мак-Лейн. Комбинаторное условие для плоских графов / С. Мак-Лейн // В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия. – 1970. Вып. 7. – С.133–144.;
 15. А.А. Зыков. Теория конечных графов. Новосибирск: ГРФМЛ. – 1963. – 542 с.;
 16. М. Свами. Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир. – 1984. – 455 с.;
 17. Ф. Харари. Теория графов. – Пер. с англ. Козырева В.П. / под ред. Гаврилова В.Г. / Ф. Харари – М.: Мир. – 1973. – 300 с.;
 18. E. Korach, Z. Ostfeld. DFS tree construction: Algorithms and characterizations // In: van Leeuwen J. (eds) Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 1988. Lecture Notes in Computer Science. – Vol

344. – Springer, Berlin, Heidelberg. – 1989.