Научная визуализация, 2026, том 18, номер 3, страницы 63 - 76, DOI: 10.26583/sv.18.3.06

Практическая система определения поверхности Безье

В.А. Короткий[1], Е.А. Усманова[2], Л.И. Хмарова[3]

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) “ЮУрГУ (НИУ)”, Челябинск, Россия

[1] ORCID: 0000-0002-5266-4701, ospolina@mail.ru
[2] ORCID: 0009-0007-7479-6047, usmanovaea@susu.ru
[3] ORCID: 0009-0001-6201-3638, khmarovali@susu.ru

Аннотация

Рассматриваются различные варианты моделирования поверхностей сложной формы с использованием кубических кривых Безье в качестве образующих. Известный из работ П. Безье алгоритм построения сетки образующих позволяет определить порцию поверхности, проходящую через наперед заданный пространственный замкнутый контур. В общем случае сетка образующих порции Безье представляет собой множество неплоских пространственных линий. Такое решение не технологично. В статье показано, что можно сформировать четырехугольную в плане порцию поверхности Безье, содержащую два семейства плоских образующих. Также возможно сформировать поверхность Безье, опирающуюся на плоскую рамку, образованную граничными кривыми произвольной формы.

Для получения G1-гладкой составной поверхности Безье используются условия гладкости, предложенные П. Безье в 1972 году. Эти условия допускают наличие излома образующих на линии соединения порций поверхности. При этом поверхность остается G1-гладкой. Некоторые свойства кривой Безье позволяют сформировать G2-гладкое сопряжение двух плоскостей.

Рассмотрен случай совпадения порций поверхностей Кунса и Безье, проходящих через фиксированный четырехугольный контур. Представлены примеры визуализации поверхности Безье при различных граничных условиях. Визуализация выполнена средствами компьютерной графики.

Ключевые слова: кубическая кривая Безье, плоские образующие, аффинное соответствие, составная поверхность, гладкость, сопряжение плоскостей.

1. Введение

В статье рассматриваются практические аспекты формирования поверхности Безье на произвольном пространственном треугольном или четырехугольном контуре. Основополагающая работа П. Безье [1] содержит концепцию геометрического моделирования составных кривых и поверхностей, а также условия гладкого сопряжения сегментов кривых линий и порций поверхностей. Имеется перевод [2] книги французских авторов, где глава 4 посвящена геометрическому методу П. Безье. В монографиях и учебных пособиях [3...11] рассматриваются различные математические и геометрические аспекты CAGD.

В историческом плане методу Безье предшествует метод Кунса [12], идея которого состоит в том, что порция поверхности формируется как суперпозиция трех линейчатых поверхностей, что обеспечивает вычислительную простоту метода. В некоторых случаях порции поверхности Безье и Кунса тождественно совпадают (см. п. 8 настоящей статьи).

Монография [13] английских авторов, посвященная практическим вопросам конструирования линий и поверхностей, наилучшим образом подходит для предварительного ознакомления с методами вычислительной геометрии. Геометрическое моделирование объектов трехмерного пространства с акцентом на твердотельное моделирование рассматривается в работе [14]. Краткое описание методов получения составных кривых и поверхностей можно найти в справочном руководстве [15]. Конструктивные алгоритмы формирования составных G2-гладких кубических кривых Безье в пространстве и на плоскости изложены в статьях [16...18].

Четырехугольная порция кубической поверхности Безье определяется указанием шестнадцати вершин 00, 01, ..., 32, 33 характеристического многогранника. Каждой точке поверхности ставится в соответствие радиус-вектор $\mathbf{r}(u,v)$. Например, угловой точке 03 соответствует радиус-вектор $\mathbf{r}_{03}$ (рис. 1).

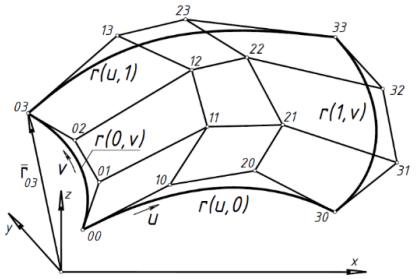


Рис. 1. Характеристический многогранник и граничные кривые порции Безье

Уравнение порции поверхности Безье имеет вид

$$\mathbf{r}(u,v)=\sum_{i=0}^{3}[\sum_{j=0}^{3}\mathbf{r}_{i,j}g_j(v)]g_i(u),\quad u,v\in[0,1], \tag{1}$$

где $g_k(t)=\dfrac{3!}{k!(3-k)!}t^k(1-t)^{3-k},\quad k=0,1,2,3.$

Раскрывая (1) и группируя слагаемые, содержащие параметр v, получаем:

$$\mathbf{r}(u,v)=(1-u)^3\mathbf{r}(0,v)+3u(1-u)^2\mathbf{q}(v)+3u^2(1-u)\mathbf{p}(v)+u^3\mathbf{r}(1,v), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(0,v)&=(1-v)^3\mathbf{r}_{00}+3v(1-v)^2\mathbf{r}_{01}+3v^2(1-v)\mathbf{r}_{02}+v^3\mathbf{r}_{03},\\
\mathbf{q}(v)&=(1-v)^3\mathbf{r}_{10}+3v(1-v)^2\mathbf{r}_{11}+3v^2(1-v)\mathbf{r}_{12}+v^3\mathbf{r}_{13},\\
\mathbf{p}(v)&=(1-v)^3\mathbf{r}_{20}+3v(1-v)^2\mathbf{r}_{21}+3v^2(1-v)\mathbf{r}_{22}+v^3\mathbf{r}_{23},\\
\mathbf{r}(1,v)&=(1-v)^3\mathbf{r}_{30}+3v(1-v)^2\mathbf{r}_{31}+3v^2(1-v)\mathbf{r}_{32}+v^3r_{33}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{r}(0,v)$ и $\mathbf{r}(1,v)$ – “левая” и “правая” границы порции (см. рис. 1). Кривые $\mathbf{q}(v)$ и $\mathbf{p}(v)$, не лежащие на конструируемой поверхности, называют управляющими кривыми, так как они несут на себе ряды точек, управляющих формой продольных образующих (рис. 2). При различных значениях параметра v уравнение (2) описывает семейство продольных образующих поверхности (1).

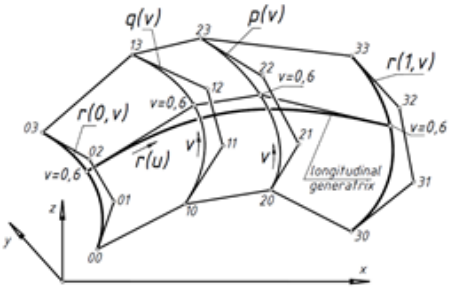


Рис. 2. Построение продольной образующей

Для построения семейства поперечных образующих в уравнении (1) следует сгруппировать слагаемые, содержащие параметр u. Получаем:

$$\mathbf{r}(u,v) = (1-v)^3\mathbf{r}(u,0) + 3v(1-v)^2\mathbf{q}(u) + 3v^2(1-v)\mathbf{p}(u) + v^3\mathbf{r}(u,1), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(u,0) &= (1-u)^3\mathbf{r}_{00} + 3u(1-u)^2\mathbf{r}_{10} + 3u^2(1-u)\mathbf{r}_{20} + u^3\mathbf{r}_{30},\\
\mathbf{q}(u) &= (1-u)^3\mathbf{r}_{01} + 3u(1-u)^2\mathbf{r}_{11} + 3u^2(1-u)\mathbf{r}_{21} + u^3\mathbf{r}_{31},\\
\mathbf{p}(u) &= (1-u)^3\mathbf{r}_{02} + 3u(1-v)^2\mathbf{r}_{12} + 3u^2(1-u)\mathbf{r}_{22} + u^3\mathbf{r}_{32},\\
\mathbf{r}(u,1) &= (1-u)^3\mathbf{r}_{03} + 3u(1-u)^2\mathbf{r}_{13} + 3u^2(1-u)\mathbf{r}_{23} + u^3r_{33}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{r}(u,0)$ и $\mathbf{r}(u,1)$ – “нижняя” и “верхняя” границы порции поверхности. Кривые $\mathbf{q}(u)$ и $\mathbf{p}(u)$, не лежащие на поверхности, несут на себе ряды точек, управляющих формой поперечных образующих $\mathbf{r}(v)$ (рис. 3). При различных значениях параметра u уравнение (4) описывает семейство поперечных образующих поверхности (1).

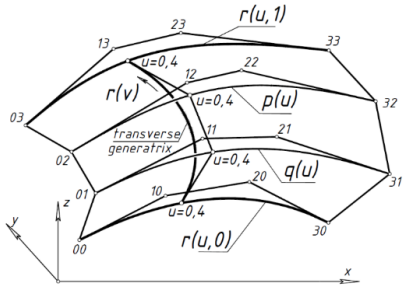


Рис. 3. Построение поперечной образующей

2. Постановка задачи и алгоритм решения

В трехмерном пространстве заданы кривые Безье $\mathbf{r}(0,v)$, $\mathbf{r}(1,v)$, $\mathbf{r}(u,0)$, $\mathbf{r}(u,1)$, образующие замкнутый четырехугольный контур (см. рис. 1). Требуется определить порцию поверхности Безье, “натянутую” на заданный контур. Поверхность определена, если задан алгоритм, позволяющий построить множество ее продольных и поперечных образующих.

Алгоритм построения образующих. Будем полагать, что граничные кривые порции Безье и вершины характеристического многогранника 11, 12, 21, 22 зафиксированы (см. рис. 1).

Шаг 1 (построение продольных образующих). В соответствии с (3) выполняем построение управляющих кривых $\mathbf{q}(v)$ и $\mathbf{p}(v)$. Затем фиксируем какое-либо значение $v=v_0$, например, v_0=0,6. На граничных кривых $\mathbf{r}(0,v)$, $\mathbf{r}(1,v)$ отмечаем точки $\mathbf{r}(0,v_0)$ и $\mathbf{r}(1,v_0)$. На управляющих кривых $\mathbf{q}(v)$, $\mathbf{p}(v)$ отмечаем точки $\mathbf{q}(v_0)$, $\mathbf{p}(v_0)$. Получаем четыре точки, определяющие характеристическую ломаную кривой Безье $\mathbf{r}(u)$. Эта кривая – продольная образующая порции поверхности Безье (см. рис. 2). Придавая раз-

личные значения параметру v, выполняем построение семейства продольных образующих искомой порции.

Шаг 2 (построение поперечных образующих). В соответствии с (5) выполняем построение управляющих кривых $\mathbf{q}(u)$, $\mathbf{p}(u)$. Затем фиксируем какое-либо значение $u=u_0$, например, $u_0=0{,}4$. На граничных кривых $\mathbf{r}(u,0)$, $\mathbf{r}(u,1)$ отмечаем точки $\mathbf{r}(u_0,0)$ и $\mathbf{r}(u_0,1)$. На управляющих кривых $\mathbf{q}(u)$, $\mathbf{p}(u)$ отмечаем точки $\mathbf{q}(u_0)$, $\mathbf{p}(u_0)$. Получаем четыре точки, определяющие характеристическую ломаную кривой Безье $\mathbf{r}(v)$. Эта кривая – поперечная образующая порции поверхности Безье (см. рис. 3). Придавая различные значения параметру u, выполняем построение семейства поперечных образующих искомой порции.

Алгоритм справедлив для любых граничных кривых порции Безье. Эти кривые могут быть плоскими или пространственными, могут вырождаться в прямую линию или в точку. Например, на рис. 4 представлена поверхность Безье, натянутая на произвольно заданный криволинейный пространственный контур.

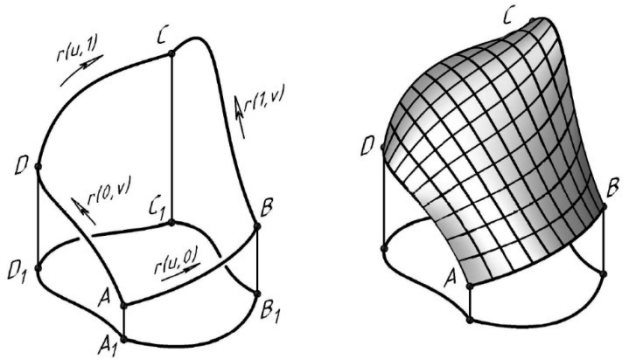
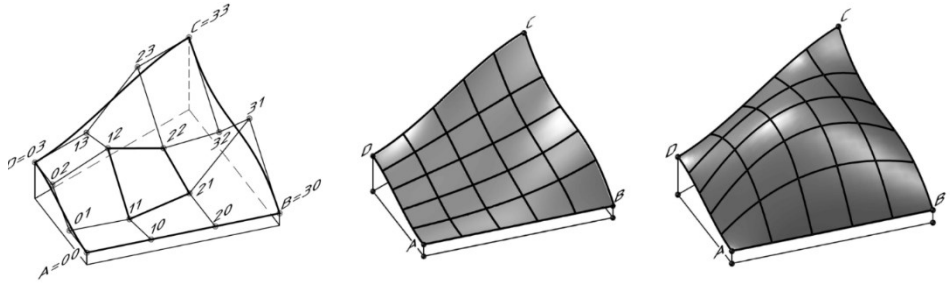


Рис. 4. Поверхность Безье на пространственном контуре

На рис. 5, a показан характеристический многогранник, содержащий прямолинейную границу AB. Изменяя положение управляющих точек 11, 12, 21, 22, получаем вогнутую (рис. 5, b) или выпуклую (рис. 5, c) порцию поверхности Безье.



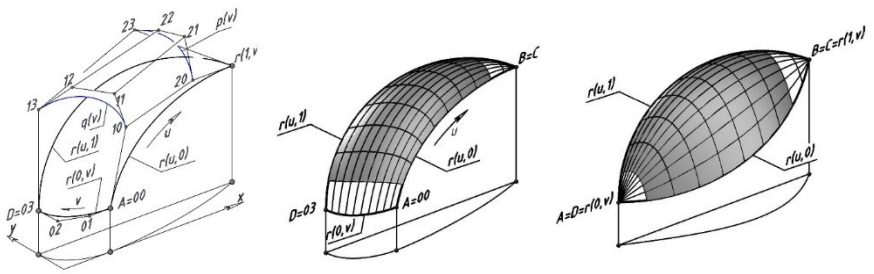
a) b) c)

Рис. 5. Порция Безье: a – характеристический многогранник; b – вогнутая поверхность; c – выпуклая поверхность

3. Вырожденные порции Безье

Если одна из границ четырехугольной порции Безье вырождается в точку, то получаем треугольную порцию. Примем для определенности, что правая граничная кривая Безье $\mathbf{r}(1,v)$, заданная характеристической ломаной 30, 31, 32, 33, выродилась в точку $B=C$ (рис. 6, a). Характеристические ломаные 10-11-12-13 и 20-21-22-23 позволяют начертить управляющие кривые Безье $\mathbf{q}(v)$ и $\mathbf{p}(v)$ (выделены синим цветом). Фиксируем произвольное значение параметра $v=v_0$. На левой граничной кривой AD отмечаем точку $\mathbf{r}(0,v_0)$. Правая граничная кривая выродилась в точку $B=C$, поэтому $\mathbf{r}(1,v_0)=B=C$. На управляющих кривых отмечаем точки $\mathbf{q}(v_0)$, $\mathbf{p}(v_0)$. Получаем четыре точки $\mathbf{r}(0,v_0)$,

q(v_0), **p**(v_0), **r**(1,v_0)=B=C, определяющие характеристическую ломаную кривой Безье **r**(u). Эта кривая – продольная образующая порции поверхности Безье при v=v_0. Придавая различные значения параметру v, находим семейство продольных образующих искомой порции. Аналогичным образом, фиксируя различные значения параметра u, находим семейство поперечных образующих. Получаем треугольную порцию Безье (рис. 6, b).



a) b) c)

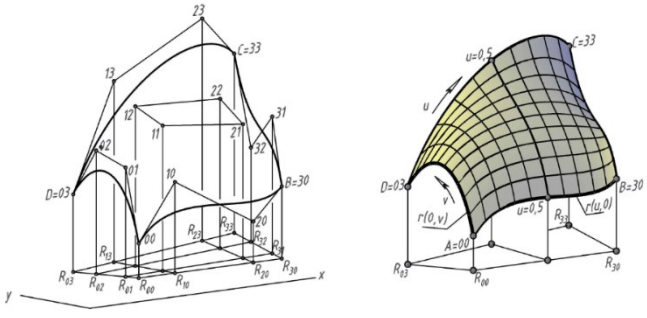
Рис. 6. Вырожденные порции Безье: a – характеристический многогранник; b – треугольная порция; c – порция с двумя вырожденными граничными кривыми

Алгоритм построения образующих, изложенный в п. 2, полностью сохраняется в случае, когда две противолежащие границы четырехугольного контура выродились в точки. На рис. 6, c показана порция Безье с вырожденными границами **r**(0,v)=A=D и r(1,v)=B=C.

4. Четырехугольная порция Безье с плоскими образующими

Если вершины характеристического многогранника назначены произвольным образом, то сетка образующих порции Безье представляет собой множество пространственных кривых линий с ненулевым кручением. Такое решение не технологично. Покажем, что можно сформировать четырехугольную в плане порцию поверхности Безье, содержащую два семейства плоских образующих. Для этого надо наложить определенные условия на выбор вершин характеристического многогранника.

Пусть даны угловые точки A=00, B=30, C=33, D=03 четырехугольной порции Безье. Ортогональная проекция порции на плоскость xy – неправильный четырехугольник $R_{00}R_{30}R_{33}R_{03}$ (рис. 7, a).



a) b)

Рис. 7. Порция Безье с плоскими образующими: a – характеристический многогранник с аффинно-соответственными противолежащими сторонами плана; b – визуализация

Исходя из конструктивных соображений, зададим две смежные границы порции, например, **r**(0,v) и **r**(u,0). Тем самым зафиксированы 8 вершин характеристического многогранника порции Безье (четыре угловые точки и две пары управляющих точек

смежных границ порции). Для определения поверхности требуется задать еще 8 вершин. Если указать эти вершины произвольным образом, то будет получена сетка пространственных образующих с ненулевым кручением.

Чтобы получить плоские образующие порции Безье, надо обеспечить аффинное соответствие противолежащих сторон плана. Аффинное соответствие левой и правой сторон достигается при равенстве отношений

$$\frac{|R_{30}-R_{31}|}{|R_{30}-R_{33}|}=\frac{|R_{00}-R_{01}|}{|R_{00}-R_{03}|},\quad \frac{|R_{30}-R_{32}|}{|R_{30}-R_{33}|}=\frac{|R_{00}-R_{02}|}{|R_{00}-R_{03}|}. \tag{6}$$

Аффинное соответствие передней и задней сторон плана достигается при равенстве отношений.

$$\frac{|R_{03}-R_{13}|}{|R_{03}-R_{33}|}=\frac{|R_{00}-R_{10}|}{|R_{00}-R_{30}|},\quad \frac{|R_{03}-R_{23}|}{|R_{03}-R_{33}|}=\frac{|R_{00}-R_{20}|}{|R_{00}-R_{03}|}. \tag{7}$$

Условия (6), (7) выполняются при параллельном проецировании стороны плана на его противолежащую сторону. Эти условия определяют положение горизонтальных проекций вершин 13, 23, 31, 32 характеристического многогранника. На положение этих вершин по высоте не накладывается никаких ограничений, что позволяет варьировать формой граничных кривых $\mathbf{r}(1,v)$ и $\mathbf{r}(u,1)$.

Горизонтальные проекции внутренних управляющих вершин 11, 12, 21, 22 определяются на пересечении отрезков, соединяющих аффинно-соответственные точки противолежащих сторон плана. Высота этих вершин может быть задана произвольно.

Порция поверхности Безье, сформированная с учетом указанных условий, представлена на рис. 7, b). На рисунке выделена плоская образующая, соответствующая значению u=0,5. Получена выпукло-вогнутая поверхность, несущая на себе два семейства плоских образующих, лежащих в вертикальных плоскостях.

5. Порция Безье на плоской рамке

Требуется натянуть поверхность Безье на плоскую четырехугольную рамку. Граничные кривые Безье вырождаются в четыре отрезка (стороны рамки). Управляющие точки (01, 02), (10, 20), (31, 32), (13, 23) на сторонах рамки могут быть назначены произвольно (рис. 8, a). Продольные и поперечные образующие поверхности определяются в соответствии с алгоритмом, изложенным в п. 2. Получаем поверхность с неплоскими (non-plane) образующими (рис. 8, b, c).

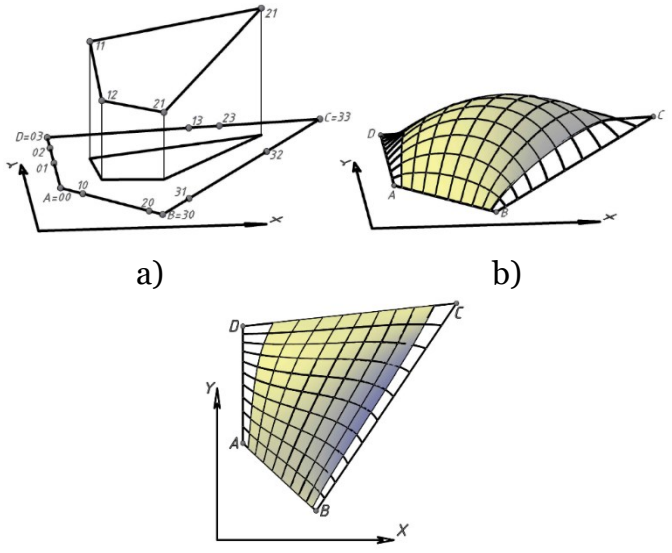
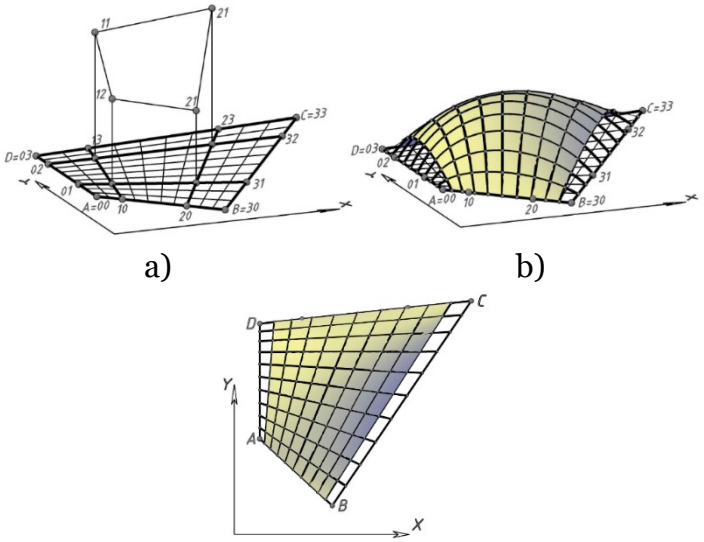


Рис. 8. Порция Безье на плоской рамке: a – произвольно указанные управляющие точки; b – аксонометрия; c – план

Чтобы получить плоские образующие порции Безье, надо обеспечить аффинное соответствие отрезков на противолежащих сторонах рамки. Управляющие точки смежных сторон, например, точки (01, 02) и (10, 20), могут быть указаны произвольно. Управляющие точки (31, 32) и (13, 23) определяются из условия аффинного соответствия противолежащих сторон (рис. 9, a). Горизонтальные проекции вершин 11, 12, 21, 22 характеристического многогранника определяются на пересечении отрезков, соединяющих аффинно-соответственные точки противолежащих сторон рамки. Высота этих вершин может быть задана произвольно. Получаем порцию поверхности Безье на плоской четырехугольной рамке. Эта поверхность несет на себе два семейства плоских образующих, лежащих в вертикальных плоскостях (рис. 9, b, c).

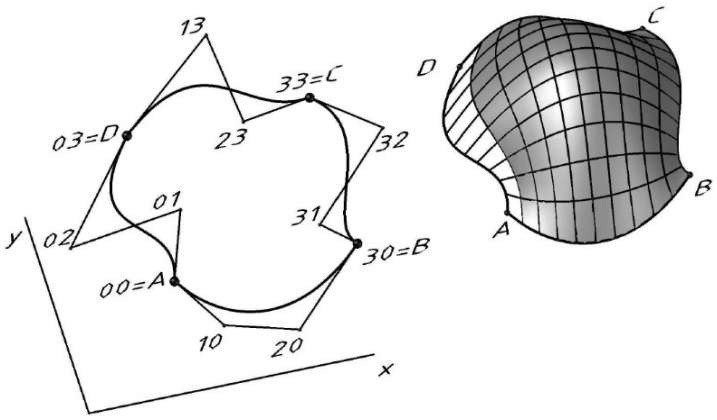


a) b)

c)

Рис. 9. Порция Безье с плоскими образующими: a – управляющие точки; b – аксонометрия; c – план

Пусть рамка образована не прямолинейными отрезками, а плоскими кривыми Безье. Зафиксированы 12 вершин характеристического многогранника (рис. 10, a). Внутренние управляющие вершины 13, 23, 31, 32 могут быть заданы произвольно. При изменении положения этих вершин меняется форма порции Безье. Алгоритм, изложенный в п. 2, позволяет построить как угодно плотную сетку продольных и поперечных образующих (рис. 10, b). Плоские образующие получить не удается.



a) b)

Рис. 10. Порция Безье на плоской рамке произвольной формы: a – рамка образована кривыми Безье; b – визуализация

6. Гладкое соединение порций Безье

Рассмотрим условия G1-гладкого соединения двух порций Безье (рис. 11). Согласно [13, стр. 195], в любой точке на линии соединительного шва *BC* должны совпадать векторы нормали к порциям *ABCD*=$\mathbf{r}^{(1)}(u,v)$ и *BMNC*=$\mathbf{r}^{(2)}(u,v)$:

$$\mathbf{r}_u^{(2)}(0,v)\times\mathbf{r}_v^{(2)}(0,v)=\lambda\mathbf{r}_u^{(1)}(1,v)\times\mathbf{r}_v^{(1)}(1,v), \tag{8}$$

где λ – произвольное число. Здесь надстрочный индекс обозначает номер порции, а подстрочный индекс указывает переменную, по которой производится дифференцирование. Постоянный множитель λ означает, что модуль вектора нормали к порциям 1 и 2 может терпеть разрыв при переходе через линию шва.

Условие (8) выполняется, если [13, стр. 197]:

$$\mathbf{r}_u^{(2)}(0,v)=\lambda\mathbf{r}_u^{(1)}(1,v)+(\mu_0+\mu_1 v)\mathbf{r}_v^{(1)}(1,v), \tag{9}$$

где μ_0 и μ_1 – произвольные числа.

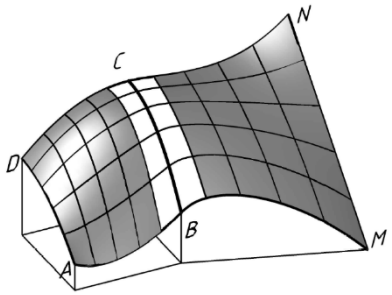


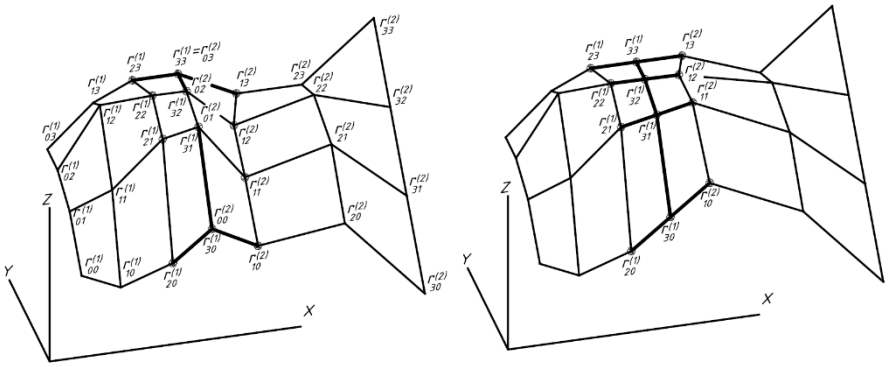
Рис. 11. Гладкое соединение порций Безье

Дифференцируя уравнения порций $\mathbf{r}^{(1)}(u,v)$, $\mathbf{r}^{(2)}(u,v)$ по параметрам u, v и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях v, получаем известные [13, стр. 198] условия гладкости:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{10}^{(2)} &= \mathbf{r}_{30}^{(1)}+\lambda(\mathbf{r}_{30}^{(1)}-\mathbf{r}_{20}^{(1)})+\mu_0(\mathbf{r}_{31}^{(1)}-\mathbf{r}_{30}^{(1)}),\\
\mathbf{r}_{11}^{(2)} &= \mathbf{r}_{31}^{(1)}+\lambda(\mathbf{r}_{31}^{(1)}-\mathbf{r}_{21}^{(1)})+\frac{1}{3}\mu_0(2\mathbf{r}_{32}^{(1)}-\mathbf{r}_{31}^{(1)}-\mathbf{r}_{30}^{(1)})+\frac{1}{3}\mu_1(\mathbf{r}_{31}^{(1)}-\mathbf{r}_{30}^{(1)}),\\
\mathbf{r}_{12}^{(2)} &= \mathbf{r}_{32}^{(1)}+\lambda(\mathbf{r}_{32}^{(1)}-\mathbf{r}_{22}^{(1)})+\frac{1}{3}\mu_0(\mathbf{r}_{33}^{(1)}+\mathbf{r}_{32}^{(1)}-2\mathbf{r}_{31}^{(1)})+\frac{2}{3}\mu_1(\mathbf{r}_{32}^{(1)}-\mathbf{r}_{31}^{(1)}),\\
\mathbf{r}_{13}^{(2)} &= \mathbf{r}_{33}^{(1)}+\lambda(\mathbf{r}_{33}^{(1)}-\mathbf{r}_{23}^{(1)})+(\mu_0+\mu_1)(\mathbf{r}_{33}^{(1)}-\mathbf{r}_{32}^{(1)}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Будем считать, что порция $\mathbf{r}^{(1)}(u,v)$ полностью определена. Зафиксированы все вершины $\mathbf{r}_{00}^{(1)}$... $\mathbf{r}_{33}^{(1)}$ характеристического многогранника этой порции (рис. 12, a). Требуется добавить порцию $\mathbf{r}^{(2)}(u,v)$, гладко соединенную с фиксированной порцией $\mathbf{r}^{(1)}(u,v)$. Координаты вершин $\mathbf{r}_{10}^{(2)}$, $\mathbf{r}_{11}^{(2)}$, $\mathbf{r}_{12}^{(2)}$, $\mathbf{r}_{13}^{(2)}$ порции $\mathbf{r}^{(2)}$ вычисляются в соответствии с условиями (10). Вершины $\mathbf{r}_{00}^{(2)}$, $\mathbf{r}_{01}^{(2)}$, $\mathbf{r}_{02}^{(2)}$, $\mathbf{r}_{03}^{(2)}$, определяющие линию шва, совпадают с соответствующими вершинами порции $\mathbf{r}^{(1)}$. Остальные восемь вершин характеристического многогранника порции $\mathbf{r}^{(2)}$ могут быть указаны произвольно.

Простейшее решение будет получено, если в (10) положить $\mu_0=\mu_1=0$. При этом, согласно (10), сходящиеся на линии шва ребра характеристических многогранников смежных порций должны быть коллинеарны. Отношение длин этих ребер должно быть постоянно и равно величине λ. Численное значение этого параметра назначается, исходя из конструктивных соображений. Например, на рис. 12, b представлены характеристические многогранники соседних порций Безье при $\lambda=1$, $\mu_0=\mu_1=0$. В этом случае продольные образующие порций гладко (без излома) соединяются на линии щва. Такой способ соединения порций Безье применяют, если составные границы *ABM* и *DCN* должны быть гладкими (см. рис. 11).



a) b)

Рис. 12. Характеристические многогранники ленты Безье: a – гладкое соединение порций (общий случай); b – частный случай гладкого соединения порций

Способ может быть использован для соединения порций Безье различной формы. Например, на рис. 13 представлен компьютерный макет обтекателя, содержащий треугольную порцию поверхности Безье.

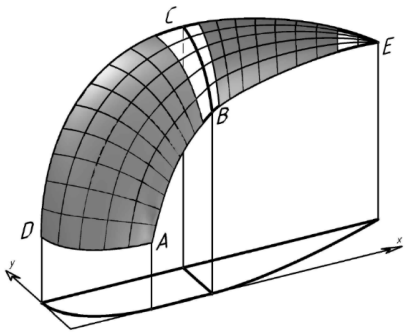
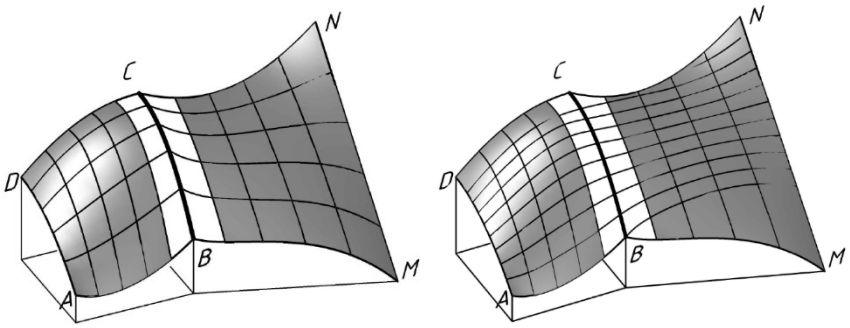


Рис. 13. Обтекатель

Если коэффициенты μ_0 и μ_1 не равны нулю, то получаем гладкую составную поверхность, продольные границы которой *ABM* и *DCN* терпят излом в точках соединения *B* и *C*. При этом требование коллинеарности ребер, сходящихся на линии шва, заменяется более слабым требованием компланарности. Согласно первому уравнению из (10), ребра ($\mathbf{r}_{20}^{(1)}-\mathbf{r}_{30}^{(1)}$), ($\mathbf{r}_{00}^{(2)}-\mathbf{r}_{10}^{(2)}$), ($\mathbf{r}_{00}^{(2)}-\mathbf{r}_{01}^{(2)}$), сходящиеся в точке $\mathbf{r}_{30}^{(1)}=\mathbf{r}_{00}^{(2)}$ на линии шва, должны быть компланарны. Согласно четвертому уравнению из (10), три ребра, сходящиеся в точке $\mathbf{r}_{33}^{(1)}=\mathbf{r}_{03}^{(2)}$, также должны быть компланарны (см. рис. 12, a). Второе и третье уравнения из (10) позволяют рассчитать координаты вершин $\mathbf{r}_{11}^{(2)}$ и $\mathbf{r}_{12}^{(2)}$.

Выполнение условий (10) обеспечивает гладкость составной поверхности при любых значениях коэффициентов λ, μ_0, μ_1. При этом продольные образующие терпят излом на линии шва. Это обстоятельство не нарушает гладкость составной поверхности, так как в любой точке на линии шва имеются три компланарные касательные к составной поверхности (касательная к линии шва, касательная к “левой” продольной образующей, касательная к “правой” продольной образующей), образующие единственную касательную плоскость. Сказанное справедливо и для угловых точек *B* и *C*. На рис. 14, a представлена поверхность, рассчитанная при $\lambda=1$; $\mu_0=-0{,}5$; $\mu_1=-1$. Эта поверхность внешне выглядит так, будто у нее есть излом на линии шва *BC*. Однако вертикальные секущие плоскости пересекают составную поверхность по гладким кривым (рис. 14, б), что подтверждает гладкость составной поверхности.



a) b)

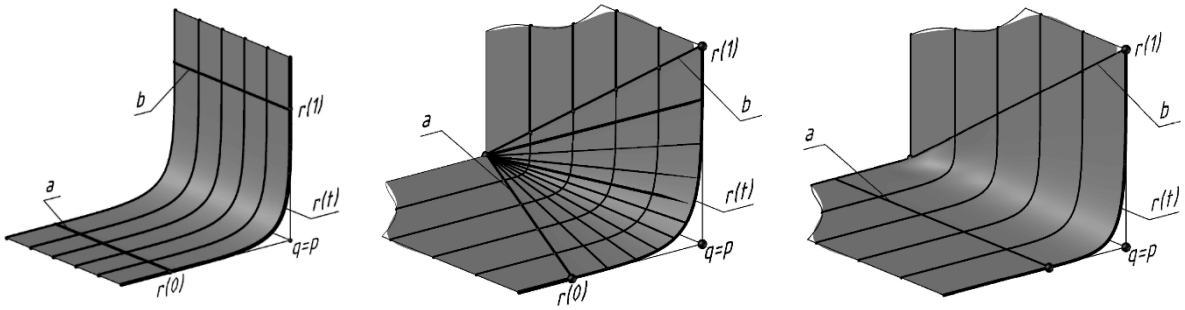
Рис. 14. Гладкая лента Безье с ломаными образующими: a – образующие (кривые Безье) с изломом на линии шва; b – сечение поверхности вертикальными плоскостями

7. Сопряжение плоскостей

Пусть требуется сформировать G2-гладкое сопряжение двух плоскостей. Гладкость G2 означает, что кривизна составной поверхности изменяется плавно, без скачков по модулю и направлению. В частности, на линии сопряжения плоскости и сопрягающей поверхности кривизна последней должна быть равна нулю. Это требование удается выполнить, если определить переходную поверхность с помощью кубических кривых Безье. Как известно [4, 5], если совпадают управляющие точки **q**=**p** сегмента кривой Безье

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)^3\mathbf{r}(0) + 3t(1-t)^2\mathbf{q} + 3t^2(1-t)\mathbf{p} + t^3\mathbf{r}(1), \tag{11}$$

то кривизна сегмента $\mathbf{r}(t)$ в концевых точках $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(1)$ равна нулю. Перемещая кривую $\mathbf{r}(t)$ в трансверсальном направлении, получаем кинематически заданную переходную поверхность. Эта поверхность имеет нулевую кривизну на линиях *a*, *b* сопряжения с горизонтальной и вертикальной плоскостями (рис. 15, a).



a) b) c)

Рис. 15. Сопряжение плоскостей с гладкостью G2: a – линии сопряжения a, b параллельны; b – линии сопряжения пересекаются; c – линии сопряжения скрещиваются

Предлагаемый способ гладкого сопряжения плоскостей может быть распространен на произвольно ориентированные линии сопряжения *a*, *b*. На рис. 15, b эти линии пересекаются, на рис. 15, c – скрещиваются. Во всех случаях достигается требуемое G2-гладкое сопряжение плоскостей.

8. Частный случай: совпадение поверхностей Кунса и Безье

Согласно методу Кунса [13, стр. 179], порция $\mathbf{r}(u,v)$ поверхности, натянутая на рамку *ABCD* (рис. 16, a) определяется как суперпозиция трех линейчатых поверхностей

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_1(u,v) + \mathbf{r}_2(u,v) - \mathbf{r}_3(u,v), \tag{12}$$

где

$$\mathbf{r}_1(u,v) = \alpha_0(u)\mathbf{r}(0,v) + \alpha_1(u)\mathbf{r}(1,v),$$
$$\mathbf{r}_2(u,v) = \alpha_0(v)\mathbf{r}(u,0) + \alpha_1(v)\mathbf{r}(u,1), \qquad (13)$$
$$\mathbf{r}_3(u,v) = \alpha_0(v)[\alpha_0(u)\mathbf{A} + \alpha_1(u)\mathbf{B}] + \alpha_1(v)[\alpha_0(u)\mathbf{D} + \alpha_1(u)\mathbf{C}].$$

Поверхность $\mathbf{r}_1(u,v)$ проходит через "левую" $\mathbf{r}(0,v)$ и "правую" $\mathbf{r}(1,v)$ границы порции. Поверхность $\mathbf{r}_2(u,v)$ проходит через "нижнюю" $\mathbf{r}(u,0)$ и "верхнюю" $\mathbf{r}(u,1)$ границы. Поверхность $\mathbf{r}_3(u,v)$ – это косая плоскость, опирающаяся на неплоский четырехугольник *ABCD*.

Чтобы порция $\mathbf{r}(u,v)$ прошла через заданные границы, функции смешения α_0, α_1 должны удовлетворять следующим условиям:

$$\alpha_0(0) = 1, \quad \alpha_1(0) = 0, \quad \alpha_0(1) = 0, \quad \alpha_1(1) = 1 \qquad (14)$$

Простейший набор функций смешения, удовлетворяющий условиям (14), имеет вид

$$\alpha_0(u) = 1 - u, \quad \alpha_1(u) = u, \quad \alpha_0(v) = 1 - v, \quad \alpha_1(v) = v. \qquad (15)$$

Применение линейных функций смешения (15) не позволяет соединять порции Кунса в единую G1-гладкую поверхность. Проблема устраняется, если при формировании порции (12) используются кубические функции смешения:

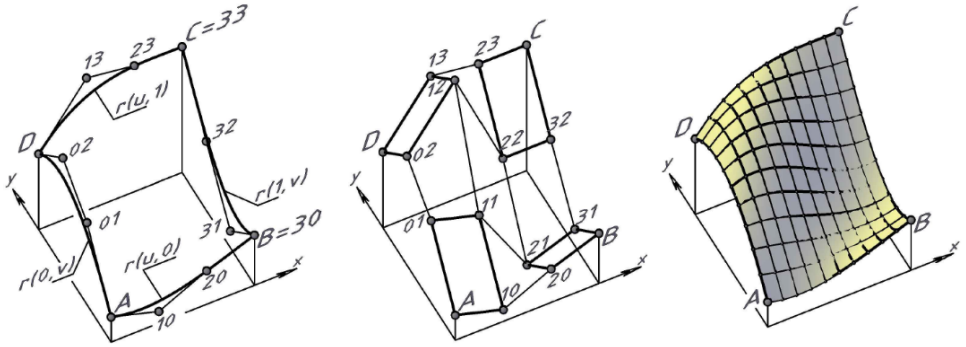
$$\alpha_0(u) = 1 - 3u^2 + 2u^3, \quad \alpha_1(u) = 3u^2 - 2u^3,$$
$$\alpha_0(v) = 1 - 3v^2 + 2v^3, \quad \alpha_1(v) = 3v^2 - 2v^3. \qquad (16)$$

Сформулируем следующее утверждение (без доказательства): если в углах порции Безье $\mathbf{r}(u,v)$, натянутой на четырехугольный каркас *ABCD*, смешанные производные $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}$ равны нулю ("плоские углы"), то порция (12), (16) поверхности Кунса, натянутая на тот же самый каркас, тождественно совпадает с порцией поверхности Безье. Заметим, что в общем случае порция поверхности Безье не содержит плоских углов. У порции Кунса (12), (16), в отличие от порции Безье, все углы плоские.

Чтобы сформулировать условия существования плоских углов порции Безье, следует найти алгебраические выражения для смешанных производных в углах порции и приравнять их нулю. Последовательно дифференцируя уравнение порции Безье (2) по параметрам u, v и подставляя в полученное выражение наборы значений $A\{u=v=0\}$, $B\{u=1, v=0\}$, $C\{u=v=1\}$, $D\{u=0, v=1\}$, получаем:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\Big|_A = 9[(\mathbf{r}_{00} - \mathbf{r}_{01}) + (\mathbf{r}_{11} - \mathbf{r}_{10})] = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\Big|_C = 9[(\mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{23}) + (\mathbf{r}_{33} - \mathbf{r}_{32})] = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\Big|_D = 9[(\mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_{02}) + (\mathbf{r}_{13} - \mathbf{r}_{03})] = 0, \qquad (17)$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\Big|_B = 9[(\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{21}) + (\mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}_{30})] = 0.$$

С геометрической точки зрения условия (17) означают, что вершины 11, 12, 21, 22 характеристического многогранника образуют параллелограммы в углах порции Безье (рис. 16, b). В этом случае порция Безье получает плоские углы, а порции поверхностей Безье и Кунса, натянутые на каркас *ABCD*, тождественно совпадают (с точностью, равной точности электронного макета) (рис. 16, c).



a) b) c)

Рис. 16. Порция поверхности Безье с плоскими углами: a – границы порции; b – характеристический многогранник; c – совпадение порций Кунса и Безье

9. Программная реализация

Для построения поверхности Безье используется программный продукт, поддерживающий трехмерную графику и позволяющий вычерчивать пространственные кривые Безье, заданные своей характеристической ломаной. В предлагаемой статье все построения выполнены в среде AutoCAD с использованием языка программирования AutoLISP. Вследствие отсутствия лицензирования, рассмотренные в статье примеры лишены транспарентности. К сожалению, авторы не сумели найти аналогичный российский программный продукт, позволяющий в интерактивном режиме выполнять необходимые пространственные построения.

Согласно предлагаемым алгоритмам, для получения компьютерного макета поверхности требуется начертить сетку продольных и поперечных образующих, после чего выполнить визуализацию с помощью команды “loft”. Любая образующая формируется как однопараметрическое множество точек с любым, как угодно малым, шагом по параметру u или v. Расчет координат точек образующей выполняется разложением ее векторного уравнения по осям координат x, y, z. Найденные точки соединяются командой “сплайн”.

10. Заключение

1. В работе рассмотрены различные варианты моделирования поверхностей сложной формы с использованием кубических кривых Безье в качестве образующих. Известный из работ П. Безье алгоритм построения образующих, изложенный в п. 2 настоящей статьи, позволяет определить порцию бикубической поверхности Безье, натянутую на четырехугольный или треугольный замкнутый контур, образованный кубическими кривыми Безье.

2. Рассмотрены геометрические условия, выполнение которых позволяет получать порцию Безье с плоскими образующими, лежащими в вертикальных плоскостях (см. п. 4).

3. Для получения гладкой (без складок и изломов) составной поверхности Безье используются условия гладкости, предложенные П. Безье в 1972 году. Согласно этим условиям, сетка образующих может терпеть излом на линии шва. При этом составная поверхность сохраняет гладкость G1 (см. п. 6).

4. Свойства кривой Безье позволяют сформировать G2-гладкое сопряжение двух плоскостей (см. п. 7).

5. Показано, что методы Кунса и Безье при определенных граничных условиях дают тождественно совпадающие поверхности, что говорит о принципиальной общности этих методов (см. п. 8).

Список литературы

1. Bézier P. Numerical Control: Mathematics and Applications. John Wiley & Sons, London, 1972.
2. Безье П. Геометрические методы // Математика и САПР. Т. 2. М.: Мир, 1989, С. 96-257
3. Agoston M.K. Computer Graphics and Geometric Modeling; Springer: London, UK, 2005, pp. 373-470.
4. Gallier J. Curves and Surfaces in Geometric Modeling: Theory and Algorithms; University of Pennsylvania: Philadelphia, PA, USA, 2018, pp. 61-114.
5. Schneider P.J., Eberly D.H. Geometric Tools for Computer Graphics; Morgan Kaufmann Publishers, Inc.: San Francisco, CA, USA, 2003, pp. 109-170, 356-358.
6. Knott G.D. Interpolating Cubic Splines; Birkhauser: Boston, MA, USA, 1999, pp. 133-138.
7. Bartels R.H., Beatty J.C., Barsky B.A. An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling; Morgan Kaufmann Publishers, Inc.: Los Altos, CA, USA, 1987, pp. 6-12, 149-152.
8. Hoschek J., Lasser D. Fundamentals of computer aided geometric design; A K Peters / CRC Press, England, 1996, pp. 213-247.
9. Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. A Practical Guide. Arizona State University: Academic Press, 2002, pp. 309-364.
10. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001.
11. Pottmann H., Wallner J. Computational Line Geometry, Springer Verlag, Berlin, 2001.
12. Coons S. A. Surfaces for Computer Aided Design of Space Form, MIT Project MAC, AUC-TR-41, 1967. http://publications.csail.mit.edu/lcs/pubs/pdf/MIT-LCS-TR-041.pdf
13. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. М.: Мир, 1982.
14. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М.: ДМК-Пресс, 2020.
15. Шикин Е. В., Плисс Л. И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. М.: Диалог-МИФИ, 1996.
16. Короткий В.А. Незакономерные кривые в инженерной геометрии и компьютерной графике // Научная визуализация, № 1, Т. 14, 2022, С. 1-17.
17. Короткий В.А. Конструктивные алгоритмы формирования составных кубических кривых Безье в пространстве и на плоскости // Омский научный вестник, № 2 (182), 2022, С. 10-16.
18. Короткий В.А., Студенова Е.С. Конструирование пространственной кривой, составленной из рациональных кубических сегментов // Вестник ЮУрГУ. Серия “Строительство и архитектура”. 2024. Т. 24. С. 72-79. DOI: 10.14529/build240410

Scientific Visualization, 2026, volume 18, number 3, pages 63 - 76, DOI: 10.26583/sv.18.3.06

A Practical System for Defining Bézier Surfaces

V.A. Korotkiy[1], E.A. Usmanova[2], L.I. Khmarova[3]

South Ural State University (National Research University) “SUSU (NRU)”,
Chelyabinsk, Russia

[1] ORCID: 0000-0002-5266-4701, ospolina@mail.ru
[2] ORCID: 0009-0007-7479-6047, usmanovaea@susu.ru
[3] ORCID: 0009-0001-6201-3638, khmarovali@susu.ru

Abstract

This paper considers various options for modeling complex-shaped surfaces using cubic Bézier curves as generatrices. The generatrix grid algorithm known from P. Bézier’s works allows defining the patch passing through a pre-defined spatial closed contour. In the general case, the generatrix grid of a Bézier patch is a set of non-planar spatial lines. However, such a solution is not technologically feasible. The paper demonstrates the ability to generate a quadrangular patch of a Bézier surface containing two families of plane generatrices. Bézier surfaces resting on a plane frame formed by the boundary curves of arbitrary shapes can be also formed.

The smoothness conditions proposed by P. Bézier in 1972 are used to obtain a G1-smooth composite Bézier surface. These conditions ensure that there is a break in the generatrices on the line connecting the patches, while the surface itself remains G1-smooth. Certain properties of the Bézier curve allow forming a G2-smooth conjugation between two planes.

The paper discusses the case where Coons and Bézier patches (surface portions) coincide and pass through a fixed quadrilateral contour and provides examples of how to visualize Bézier surfaces under different boundary conditions using computer graphics.

Keywords: cubic Bézier curve, plane generatrices, affine correspondence, composite surface, smoothness, conjugation of planes.

References

1. Bézier P. Numerical Control: Mathematics and Applications. John Wiley & Sons, London, 1972.
2. Bézier P. Geometric methods // Mathematics and CAD. Vol. 2. Moscow: Mir, 1989. P. 96–257.
3. Agoston M.K. Computer Graphics and Geometric Modeling; Springer: London, UK, 2005, pp. 373-470.
4. Gallier J. Curves and Surfaces in Geometric Modeling: Theory and Algorithms; University of Pennsylvania: Philadelphia, PA, USA, 2018, pp. 61–114.
5. Schneider P.J., Eberly D.H. Geometric Tools for Computer Graphics; Morgan Kaufmann Publishers, Inc.: San Francisco, CA, USA, 2003, pp. 109-170, 356-358.
6. Knott G.D. Interpolating Cubic Splines; Birkhauser: Boston, MA, USA, 1999, pp. 133–138.
7. Bartels R.H., Beatty J.C., Barsky B.A. An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling; Morgan Kaufmann Publishers, Inc.: Los Altos, CA, USA, 1987, pp. 6–12, 149–152.
8. Hoschek J., Lasser D. Fundamentals of computer aided geometric design; A K Peters / CRC Press, England, 1996, pp. 213-247.
9. Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. A Practical Guide. Arizona State University: Academic Press, 2002, pp. 309–364.

10. Rogers D., Adams J. Mathematical foundations of machine graphics. Moscow: Mir, 2001.
11. Pottmann H., Wallner J. Computational Line Geometry, Springer Verlag, Berlin, 2001.
12. Coons S. A. Surfaces for Computer Aided Design of Space Form, MIT Project MAC, AUC-TR-41, 1967. http://publications.csail.mit.edu/lcs/pubs/pdf/MIT-LCS-TR-041.pdf
13. Fox A., Pratt M. Computational geometry. Application in design and production. Moscow: Mir, 1982. 304 p.
14. Golovanov N.N. Geometric Modeling. Moscow: DMK-Press, 2020. 406 p.
15. Shikin E.V., Plis A.I. Curves and Surfaces on a computer screen. Moscow: Dialog-MIFI, 1996. 240 p.
16. Korotkij V.A. Irregular curves in engineering geometry and computer graphics // Scientific Visualization, 2022. Vol. 14, № 1. P. 1–17. DOI: 10.26583/sv.14.1.01
17. Korotkij V.A. Constructive algorithms for forming composite cubic Bézier curves in space and on the plane // Omsk Scientific Bulletin, 2022. № 2 (182). P. 10–16.
18. Korotkij V.A., Studenova E.S. Construction of a spatial curve composed of rational cubic segments // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture. 2024. № 24(4). P. 72–79. DOI: 10.14529/build240410