

# Возможность применения метода Гершберга-Папулиса в задаче реконструкции фазовой структуры по малоракурсным гильбертограммам

Э.В. Арбузов<sup>1,A,B</sup>, В.А. Арбузов<sup>2,A</sup>, Ю.Н. Дубнищев<sup>3,A</sup>, О.С. Золотухина<sup>4,A</sup>,  
М.М. Лапиков<sup>5,A</sup>, В.В. Лукашов<sup>6,A</sup>

<sup>A</sup> ФГБУН Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН

<sup>B</sup> ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

<sup>1</sup> ORCID: 0000-0001-9488-8650, [arbuzov@math.nsc.ru](mailto:arbuzov@math.nsc.ru)

<sup>2</sup> ORCID: 0000-0003-2404-326X, [arbuzov@itp.nsc.ru](mailto:arbuzov@itp.nsc.ru)

<sup>3</sup> ORCID: 0000-0001-7874-039X, [dubnistchev@itp.nsc.ru](mailto:dubnistchev@itp.nsc.ru)

<sup>4</sup> ORCID: 0000-0003-3486-4459, [melexina-olga17@ya.ru](mailto:melexina-olga17@ya.ru)

<sup>5</sup> ORCID: 0009-0009-0759-8627, [mlapikov1@list.ru](mailto:mlapikov1@list.ru)

<sup>6</sup> ORCID: 0000-0001-8178-7607, [luka@itp.nsc.ru](mailto:luka@itp.nsc.ru)

## Аннотация

В работе обсуждается возможность обработки методом Гершберга-Папулиса малоракурсных гильбертограмм для восстановления пространственного распределения показателя преломления фазовых объектов. Метод заключается в итерационных переходах от оценки функции в фурье-плоскости к её оценке в координатном пространстве с корректировкой на основании априорной информации. В результате итерационного процесса спектр восстанавливаемой функции определяется на всей частотной плоскости. Выполнено численное моделирование реконструкции показателя преломления для различных тестовых функций методом Гершберга-Папулиса по данным Радона, известным для четырёх ракурсов. С использованием четырёхракурсного томографического комплекса, реализованного на базе модернизированного теневого прибора ИАБ-463М, выполнены экспериментальные исследования на примере гильберт-диагностики реагирующих сред (пламён) в высокоскоростном режиме съёмки (до 2000 кадров в секунду).

**Ключевые слова:** гильберт-оптика, оптическая томография, метод Гершберга-Папулиса.

## 1. Введение

Исследование фазовых объектов методами пространственной оптической фильтрации остаётся актуальной задачей до сегодняшнего времени [1, 2]. Исторически методы наблюдения фазовых объектов называют теневыми методами (ТМ), а соответствующие приборы – теневыми приборами [3, 4]. ТМ заняли достойное место востребованных и эффективных методик в диагностике прозрачных неоднородностей в различных средах [5]. Однако, до сих пор ТМ не получили признанного статуса точных и строго количественных методов фазовых измерений.

В 2003 и 2007 году были изданы монографии [6, 7], в которых представлены современные методы исследования фазовых объектов, основанные на анализе пространственно-временных и частотных параметров оптических сигналов: лазерная доплеровская анемометрия и гильберт-фильтрация возмущённой исследуемой средой световых полей. Преобразования Гильберта позволили представить теорию классических теневых приборов в виде компактного математического аппарата и усовершенствовать ме-

тодику диагностики сигналов в этих оптических системах. Методы гильберт-оптики могут обеспечивать более высокую чувствительность, так как в структуре «гильбертограмм» содержатся признаки, позволяющие получать численные характеристики оптического поля плотности без привлечения для этих целей средств интерферометрии. Работа [8] является одной из первых, в которой была отмечена полезность гильберт-преобразования в оптической фурье-спектроскопии.

В [9, 10] представлены результаты измерений температурных полей газовых и реагирующих сред (пламён) и молярных концентраций продуктов горения топлива методами гильберт-оптики в приближении осевой симметрии объекта визуализации. Следующим этапом развития исследований является диагностика сложных (несимметричных) структур методами компьютерной томографии (КТ) [11, 12]. Одной из ключевых проблем оптической КТ является проблема, связанная с трудностью организации достаточного числа проекций или малым угловым диапазоном диагностирования объекта.

Алгоритм Гершберга-Папулиса является одним из распространенных методов для решения проблемы реконструкции исследуемых структур в малоракурсной томографии [13–15]. Он основывается на итерационном процессе, который позволяет уточнять результаты, минимизируя расхождения между экспериментальными данными и теоретическими оценками на каждой итерации.

Целью настоящей работы является исследование метода Гершберга-Папулиса и его применение для реконструкции полей фазовой оптической плотности газовых, конденсированных и реагирующих (пламён) сред по данным малоракурсной гильберт-томографии.

## 2. Малоракурсная гильберт-томография

Для реализации гильберт-томографии разработан оптический комплекс на базе модернизированного теневого прибора ИАБ-463М, позволяющий выполнять зондирование исследуемого объекта с четырёх ракурсов и синхронно регистрировать томографические проекции визуализированных фазовых структур одной видеокамерой (рис. 1).

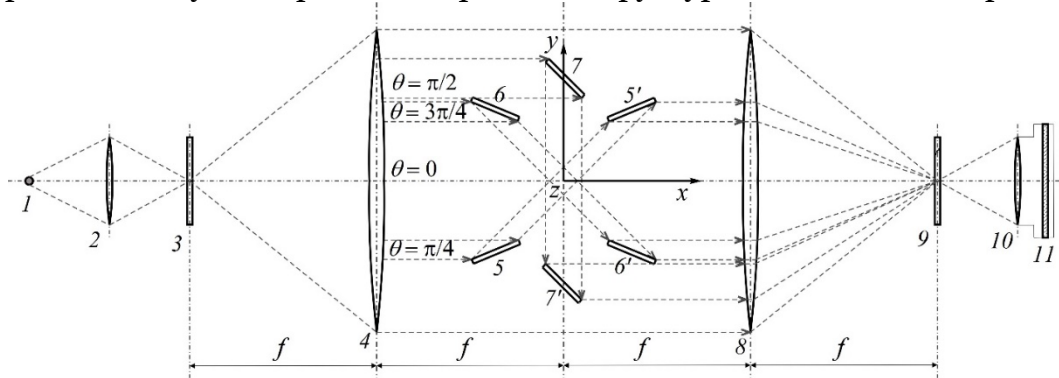


Рис. 1. Упрощённая схема гильберт-томографа.

Комплекс содержит осветительный модуль, состоящий из источника излучения 1, объектива 2 и щелевой диафрагмы 3, помещённой в передней фурье-плоскости объектива 4. В качестве источника излучения используется лазер KLM-532-2000 с подавлением пространственной когерентности. Структура зондирующих световых полей, реализующих 4R томографическую диагностику, образованы попарной конфигурацией зеркал 5 и 5', 6 и 6', 7 и 7', формирующих пучки, ориентированные относительно оптической оси теневого прибора под углами  $\theta_p = \pi(p - 1)/4$ , где номер проекции  $p = 1, \dots, 4$ . Габаритные размеры зеркал 100×15×145 мм.

Фурье-спектр фазовых возмущений, индуцируемых в зондирующих полях объектом исследования, локализуется в частотной плоскости объектива 8, где помещён квад-

рантный фазовый гильберт-фильтр 9 [7]. Объектив 10 скоростной видеокамеры преобразует фильтрованное поле в зависимости от спектральных характеристик светового источника в аналитический или гильберт-сопряжённый оптические сигналы, которые регистрируются на ПЗС-матрице 11. Выбор технического решения томографа обусловлен возможностью использования большого поля зрения (400 мм) теневого прибора ИАБ-463М.

Линейный световой источник, ориентированный по одной из пространственно-частотных осей, в сочетании с квадрантным фазовым гильберт-фильтром обеспечивает одномерное гильберт-преобразование  $p$ -томографической компоненты оптического поля:

$$I_p(y_p, z) = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_p(y', z)}{y_p - y'} dy' \right|^2 = |\hat{s}_p(y_p, z)|^2,$$

где  $I_p(y_p, z)$  – интенсивность сигнала, регистрируемого видеокамерой,  $\hat{s}_p(y_p, z)$  – гильберт-образ сигнала  $s_p(y_p, z) = e^{i\varphi_p(y_p, z)}$ ,  $\varphi_p(y_p, z)$  – фазовая функция, которая определяется преобразованием Радона от показателя преломления  $n(x_p, y_p, z)$  в локальной структуре исследуемой среды:

$$\varphi_p(y_p, z) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_{x'}^{x''} [n(x_p, y_p, z) - n_\infty] dx_p,$$

$\lambda$  – длина волны,  $n_\infty$  – показатель преломления воздуха,  $x'$  и  $x''$  – точки входа и выходы луча относительно локальной структуры исследуемой среды для определённой томографической компоненты.

С использованием гильберт-томографического комплекса выполнены эксперименты по изучению процессов горения. На рис. 2 и 3 показаны примеры гильбертограмм пламени горелки и свечи.

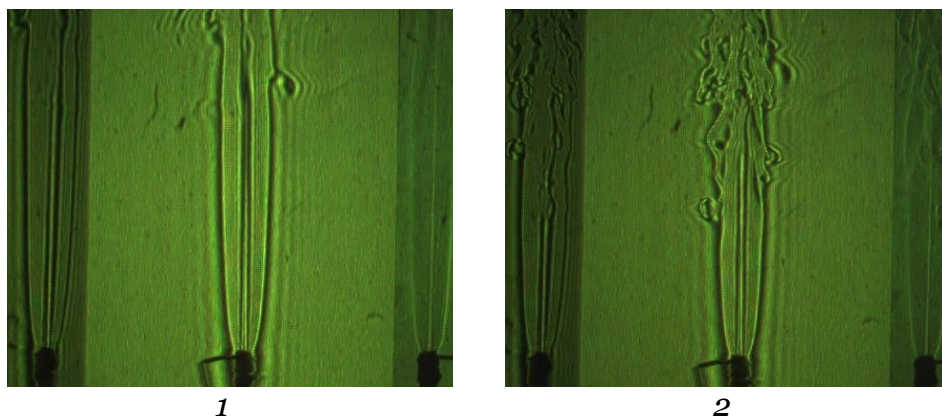


Рис. 2. 3R гильбертограмма пламени горелки: последовательно показаны проекция  $\theta_p = 3\pi/4$ , фронтальная проекция  $\theta_p = 0$  и проекция под углом  $\theta_p = \pi/4$ .

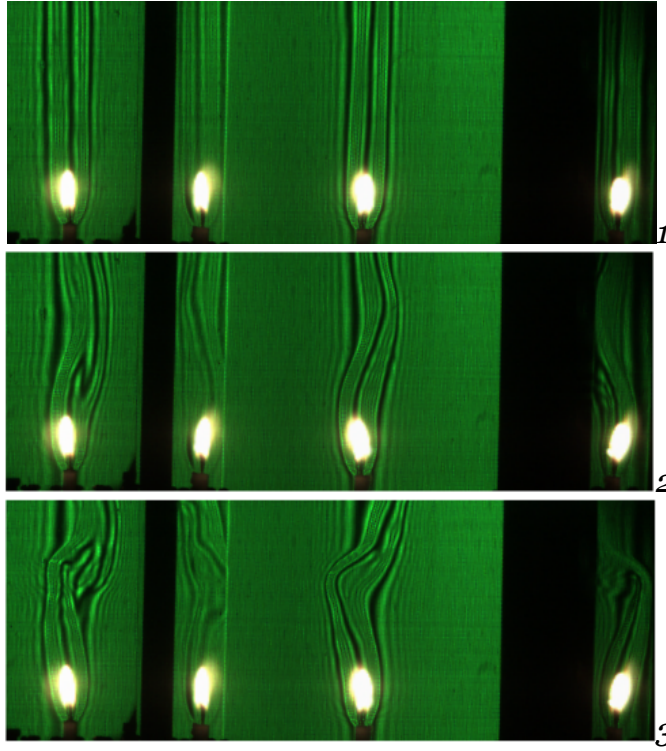


Рис. 3. 4R гильбертограммы пламени свечи: проекция  $\theta_p = \pi/2$ ,  $\theta_p = 3\pi/4$ , фронтальная проекция  $\theta_p = 0$  и проекция под углом  $\theta_p = \pi/4$ .

### 3. Метод Гершберга-Папулиса

Обратная задача томографии в параллельной постановке состоит в восстановлении функции показателя преломления  $n = n(x, y)$  по значениям интегралов от неё вдоль траекторий  $L: \vec{r} \cdot \vec{e}_\theta = s$ ,  $\vec{r} = (x, y)$  и  $\vec{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ :

$$\mathcal{R}_\theta n(s) = \int_L n(x, y) dl = \iint_{R^2} \delta(s - \vec{r} \cdot \vec{e}_\theta) n(x, y) dx dy.$$

Многие формулы обращения задачи Радона основаны на теореме о центральном сечении [16], которая утверждает, что преобразование Фурье (одномерное) от проекции  $\mathcal{R}_\theta n(s)$  равно сечению двумерного преобразования Фурье от функции  $n = n(x, y)$ :

$$\overline{\mathcal{R}_\theta n}(\omega) = F[n](W_\theta), \quad W_\theta = (\omega \cos\theta, \omega \sin\theta).$$

Эта теорема лежит в основе многих алгоритмов компьютерной томографии, в частности метода обратных проекций [15].

Алгоритм Гершберга-Папулиса является одним из наиболее эффективных методов реконструкции функций по их проекциям Радона, особенно в тех случаях, когда число направлений сканирования невелико или ограничен их угловой диапазон. Суть метода заключается в том, что априорная информация об искомой функции  $n(x, y)$  и её известных проекциях  $\mathcal{R}_\theta n(s)$  используется для создания начального приближения и последующей корректировки в координатном и частотном пространствах. В качестве априорной информации используется неотрицательность и финитность искомой функции:

$$n(x, y) \geq 0; \quad n(x, y) = 0; \quad x^2 + y^2 \geq 1.$$

Эти свойства определяет оператор  $S_M$ , действующий в пространственной плоскости.

В фурье-плоскости из данных Радона известны значения функции  $N(W) = F[n](W)$  на направлениях вдоль векторов  $\vec{e}_p = (\cos\theta_p, \sin\theta_p)$ . Это означает, что преобразование Фурье искомой функции  $n(x, y)$  известно на множестве  $M$ :

$$M = \{W = \omega \vec{e}_p, -\infty < \omega < \infty\}.$$

Если  $H_M$  характеристическая функция множества  $M$ :

$$H_M = \begin{cases} 1, & W \in M; \\ 0, & W \notin M; \end{cases}$$

то известны значения

$$S_M(W) = H_M(W)N(W).$$

Для реконструкции функции показателя преломления необходимо выполнить следующие операции:

1. По известным данным Радона вычисляются одномерные фурье-образы. Таким образом определяется функция  $S_M$ , равная значениям двумерного преобразования Фурье от искомой функции на направлениях, соответствующих углам проекций, и равная нулю в остальных точках фурье-плоскости.

2. Определяется начальное приближение  $n^0$ : выполняется обратное двумерное преобразование Фурье от функции  $S_M$ . Вносится априорная информация о положительности показателя преломления  $n$  и ограниченности области его задания (применяется оператор  $C_M$ ).

3. Выполняется двумерное преобразование Фурье от начального приближения. Значения спектра на направлениях, соответствующих углам проекций, заменяются величинами, вычисленными на шаге 1.

4. Выполняется обратное двумерное преобразование Фурье от полученной на предыдущем шаге функции и к результату применяется оператор  $C_M$ .

5. Проверяется критерий окончания итерационного процесса (если он не выполняется, то повторяются шаги 3, 4): малость нормы отклонения полученной томограммы от её оценки на предыдущем этапе  $\Delta_m$ :

$$\Delta_m^2 = \frac{\sum_i \sum_j (n_{i,j}^m - n_{i,j}^{m+1})^2}{\sum_i \sum_j (n_{i,j}^m)^2}.$$

В результате алгоритм реконструкции можно представить в виде:

$$\begin{aligned} N^0 &= S_M, \quad n^0 = C_M F^{-1}[N^0], \\ N^{m+1} &= S_M + F^{+1}[n^m](1 - H_M), \quad n^{m+1} = C_M F^{-1}[N^{m+1}]. \end{aligned}$$

Использование метода Гершберга-Папулиса для реконструкции показателя преломления по гильбертограммам обусловлено тем, что при получении цифрового изображения с использованием системы зеркал, значения проекций для всех выбранных ракурсов наблюдения определены в тех точках, которые соответствуют интегралам Радона вдоль прямых, проходящих через узлы сетки дискретизации, соответствующей разрешению фотоматрицы. Поэтому дискретный аналог теоремы о центральном сечении позволяет получать начальные данные в фурье-плоскости без предварительной интерполяции.

## 4. Реконструкция тестовых объектов

Для оценки эффективности применения метода Гершберга-Папулиса при восстановлении неизвестной функции по её данным Радона, полученным по четырем проекциям, были рассмотрены линейные комбинации следующих функций:

$$f(x, y) = A e^{1/a^2} e^{-1/|a-|\vec{r}-\vec{r}_0||^2} Heaviside(a - |\vec{r} - \vec{r}_0|),$$

$$g(x, y) = A e^{-|\vec{r}-\vec{r}_0|^2/s^2},$$

$$h(x, y) = A Heaviside(a - |\vec{r} - \vec{r}_0|),$$

где

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \vec{r}_0 &= (x_0, y_0), \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \end{aligned}$$

Результаты реконструкции представлены на рис. 4–10, где (а) – исходная функция, (б) – функция, реконструированная методом Гершберга-Папулиса с указанием среднеквадратической ошибки восстановления  $\Delta_m$ , (в) – функция, реконструированная мето-

дом обратных проекций с фильтрацией, (г) – функция, реконструированная методом обратных проекций без фильтрации.

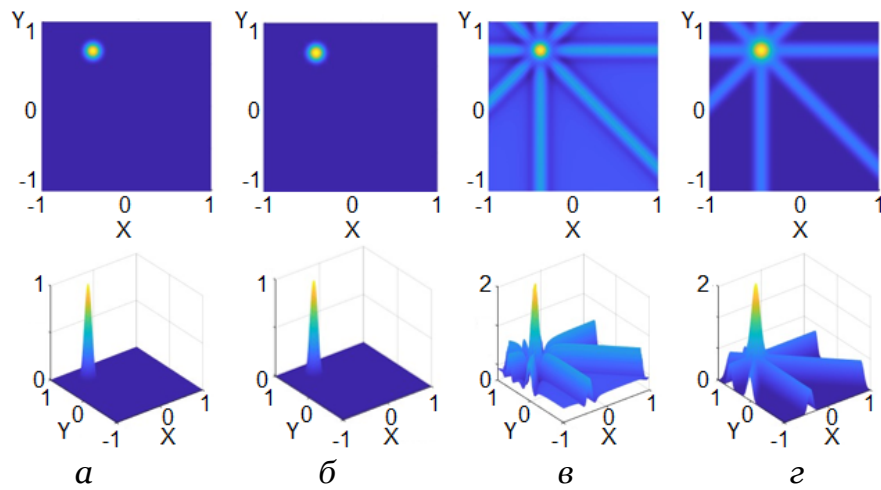


Рис. 4.  $n(x, y) = f_p(x, y)$ ;  $x_0 = -0,4$ ;  $y_0 = 0,65$ ;  $A = 1$ ;  $a = 0,3$ ;  $\Delta_m = 1,53\%$ , число итераций  $t = 751$ .

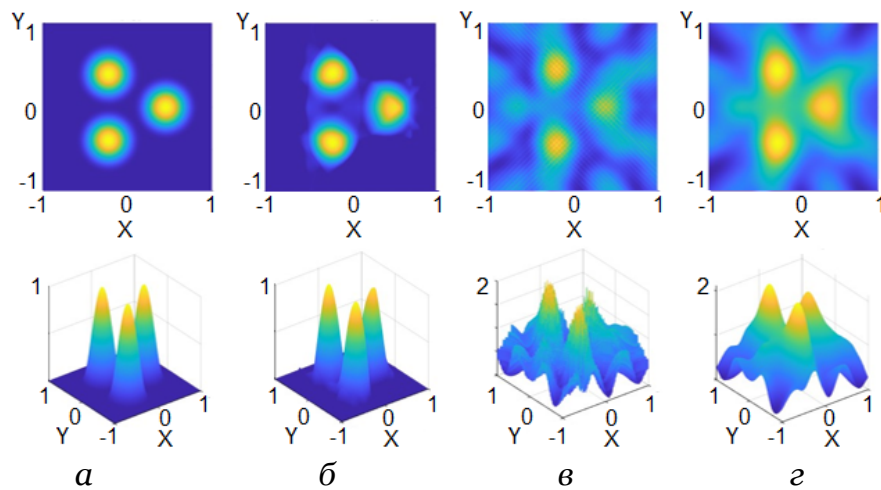


Рис. 5.  $(x, y) = \sum_{p=1}^3 f_p(x, y)$ ;  
 $x_0 = 0,45 (1; -0,5; -0,5)$ ;  $y_0 = 0,45 (0; 0,86; -0,86)$ ;  
 $A = (1; 1; 1)$ ;  $a = (0,5; 0,5; 0,5)$ ;  
 $\Delta_m = 11,53\%$ , число итераций  $t = 840$ .

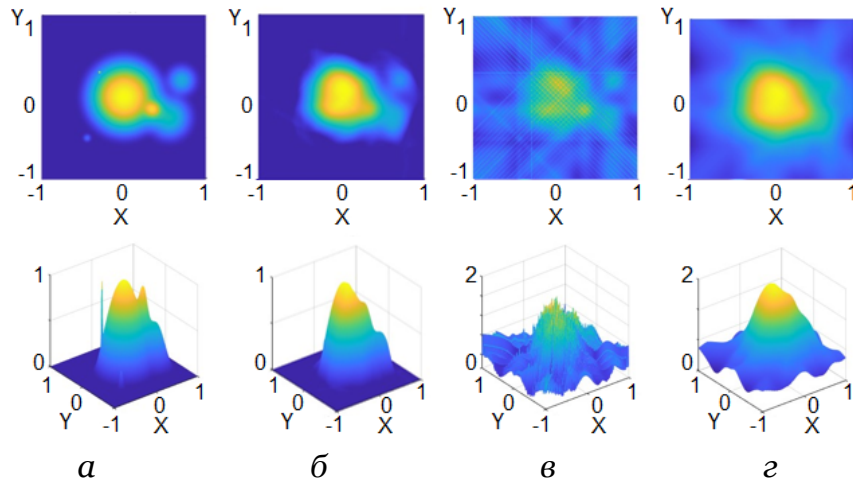


Рис. 6.  $(x, y) = \sum_{p=1}^6 f_p(x, y)$ ;

$$x_0 = (0; 0,35; 0,55; 0,7; -0,45; -0,3); \quad y_0 = (0; -0,15; -0,25; 0,2; -0,5; 0,3);$$

$$A = (1; 0,3; 0,5; 0,4; 0,2; 0,8); \quad a = (0,7; 0,3; 0,5; 0,4; 0,2; 0,1);$$

$$\Delta_m = 9,99\%, \text{ число итераций } m = 96.$$

Далее рассматриваются функции, аналогичные тестовым примерам, представленным в работе [17].

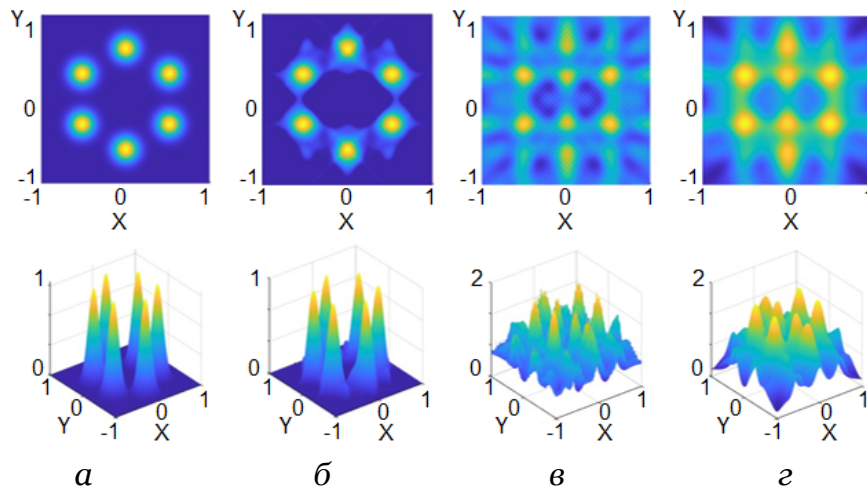


Рис. 7.  $n(x, y) = \sum_{k=1}^6 g_k(x, y)$ ;

$$x_0 = 0,65 (0,86; 0; -0,86; -0,86; 0; 0,86); \quad y_0 = 0,65 (0,5; 1; 0,5; -0,5; -1; -0,5);$$

$$A = (1; 1; 1; 1; 1; 1); \quad s = (0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1);$$

$$\Delta_m = 18,44\%, \text{ число итераций } m = 573.$$

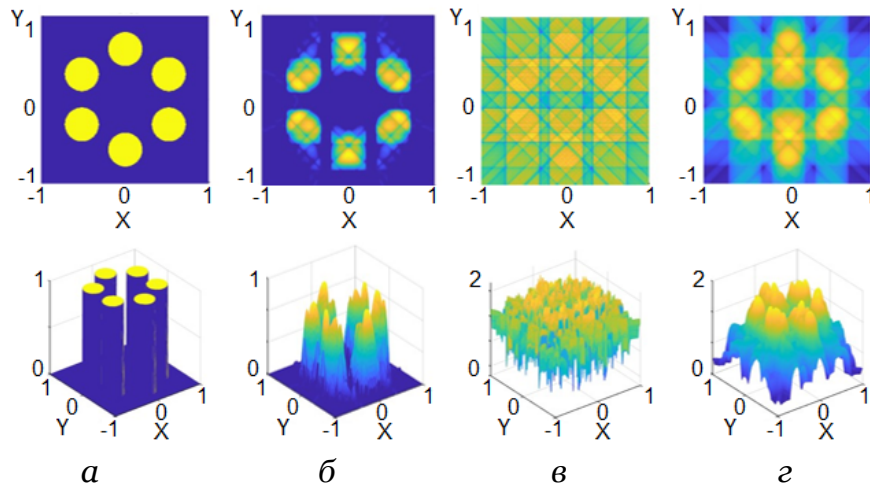


Рис. 8.  $n(x, y) = \sum_{p=1}^6 h_p(x, y; a_p)$ ;  
 $x_0 = 0,65 (0,86; 0; -0,86; -0,86; 0; 0,86)$ ;  $y_0 = 0,65 (0,5; 1; 0,5; -0,5; -1; -0,5)$ ;  
 $A = (1; 1; 1; 1; 1; 1)$ ;  $a = (0,2; 0,2; 0,2; 0,2; 0,2; 0,2)$ ;  
 $\Delta_m = 34,85\%$ , число итераций  $m = 302$ .

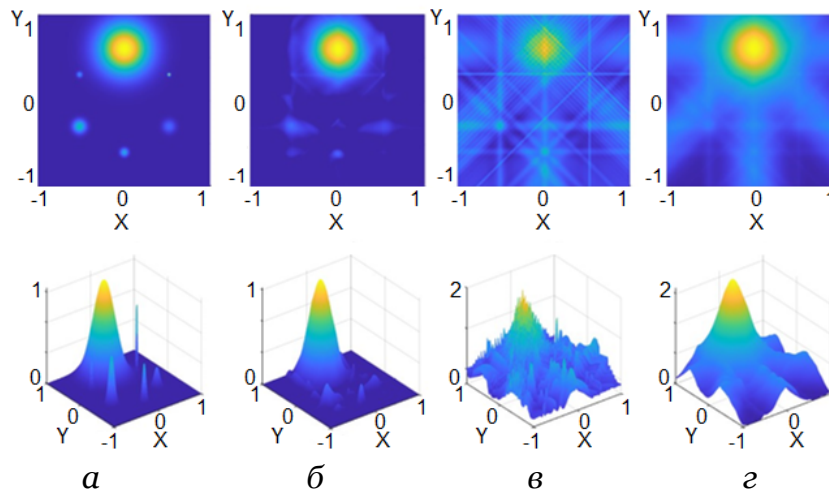


Рис. 9.  $n(x, y) = \sum_{p=1}^6 f_p(x, y; a_p)$ ;  
 $x_0 = 0,65 (0,86; 0; -0,86; -0,86; 0; 0,86)$ ;  $y_0 = 0,65 (0,5; 1; 0,5; -0,5; -1; -0,5)$ ;  
 $A = (0,8; 1; 0,3; 0,5; 0,4; 0,2)$ ;  $a = (0,01; 0,2; 0,02; 0,05; 0,03; 0,05)$ ;  
 $\Delta_m = 10,92\%$ , число итераций  $m = 404$ .

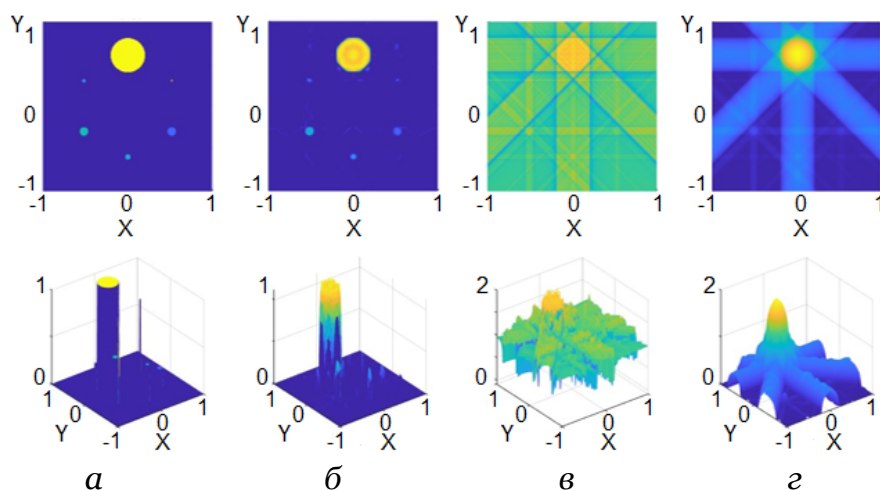


Рис. 10.  $n(x, y) = \sum_{p=1}^6 h_p(x, y; a_p)$ ;

$$x_0 = 0,65 (0,86; 0; -0,86; -0,86; 0; 0,86); \quad y_0 = 0,65 (0,5; 1; 0,5; -0,5; -1; -0,5);$$

$$A = (0,8; 1; 0,3; 0,5; 0,4; 0,2); \quad a = (0,01; 0,2; 0,02; 0,05; 0,03; 0,05);$$

$$\Delta_m = 14,66\%, \text{ число итераций } m = 1185.$$

Так как итерационный метод Гершберга-Папулиса выполняет интерполяцию спектра восстанавливаемой функции по известным значениям, заданным на прямых, соответствующих направлениям сканирования, результат реконструкции будет лучше, если фурье-спектр исходной функции локализован в области низких пространственных частот. Приведенные примеры модельных функций являются иллюстрацией данного положения.

## 5. Заключение

В работе исследована возможность применения метода Гершберга-Папулиса для решения проблемы малоракурсной оптической гильберт-диагностики. Выполнено численное моделирование для оценки эффективности метода.

Метод Гершберга-Папулиса представляет собой важный инструмент в области компьютерной томографии и оптики. Он позволяет решать проблемы, связанные с восстановлением изображений при ограниченных проекциях, и находит применение в различных областях науки и промышленности. Однако, для более точного восстановления изображений, возможно потребуется модификаций данного метода или использование дополнительных методов.

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН № FWNF-2022-0009, остальных авторов – в рамках государственного задания ИТ СО РАН № 121031800217-8.

## Список литературы

1. Белозеров А. Ф. Оптические методы визуализации газовых потоков. Казань: Казан. гос. техн. ун-т, 2007, 747 с.
2. Смирнов С. А. Преобразование оптических сигналов. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008, 113 с.
3. Васильев Л. А. Теневые методы. М.: Наука, 1968, 400 с.
4. Settles G. S. Schlieren and shadowgraph techniques: visualizing phenomena in transparent media. Springer, 2001, 376 p.

5. Recent developments in schlieren and shadowgraphy / M. J. Hargather, G. S. Settles // 27th AIAA Aerodynamic Measurement Technology and Ground Testing Conference (28 June – 1 July 2010, Chicago, Illinois), Chicago, 2010, 12 p.
6. Дубнищев Ю. Н., Арбузов В. А., Белоусов П. П., Белоусов П. Я. Оптические методы исследования потоков. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2003, 418 с.
7. Арбузов В. А., Дубнищев Ю. Н. Методы гильберт-оптики в измерительных технологиях. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007, 316 с.
8. Sakai H., Vanasse G. Hilbert transform in Fourier spectroscopy // Journal of the Optical Society of America, Vol. 56 (1), 1966, pp. 131–132 (doi: 10.1364/JOSA.56.000131).
9. Дубнищев Ю. Н., Арбузов В. А., Арбузов Э. В., Золотухина О. С., Лукашов В. В. Полихроматическая диагностика пламени с гильберт-верификацией визуализированной фазовой структуры // Научная визуализация, Т. 13 (4), 2021, С. 1–8 (doi: 10.26583/sv.13.4.01).
10. Arbuzov V. A., Arbuzov E. V., Dubnishchev Yu. N., Lukashov V. V., Zolotukhina O. S. Optical diagnostics of hydrogen-air diffusion jet flame // Journal of Engineering Thermophysics, Vol. 31 (3), 2022, pp. 402–413 (doi: 10.1134/S1810232822030031).
11. Левин Г. Г., Вишняков Г. Н. Оптическая томография. М.: Радио и связь, 1989, 224 с.
12. Xiong Wan, Yiqing Gao, Qing Wang, Shuping Le, Shenglin Yu. Limited-angle optical computed tomography algorithms // Optical Engineering, Vol. 42 (9), 2003, pp. 2659–2669 (doi: 10.1117/1.1595104).
13. Gerchberg R. W. Super-resolution through error energy reduction // Opt. Acta., Vol. 21 (9), 1974, pp. 709–720 (doi: 10.1080/713818946).
14. Papoulis A. A. New algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation // IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 22 (9), 1975, pp. 735–742 (doi: 10.1109/TCS.1975.1084118).
15. Пикалов В. В., Мельникова Т. С. Низкотемпературная плазма. Томография плазмы (том 13). Новосибирск: Наука, 1995, 229 с.
16. Кравчук А. С. Основы компьютерной томографии: Пособие для студентов. Москва, 1999, 151 с.
17. Pickalov V. V., Kazantsev D. I. New iterative reconstruction methods for fan-beam tomography // Inverse Problems in Science and Engineering, Vol. 26 (2), 2018, pp. 773–791 (doi: 10.1080/17415977.2017.1340946).

# Possibility of Using the Gershberg-Papoulis Method in the Problem of Phase Structure Reconstructing from Low-angle Hilbertograms

E.V. Arbuzov<sup>1,A,B</sup>, V.A. Arbuzov<sup>2,A</sup>, Yu.N. Dubnishchev<sup>3,A</sup>, O.S. Zolotukhina<sup>4,A</sup>,  
M.M. Lapikov<sup>5,A</sup>, V.V. Lukashov<sup>6,A</sup>

<sup>A</sup> Kutateladze Institute of Thermophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

<sup>B</sup> Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

<sup>1</sup> ORCID: 0000-0001-9488-8650, [arbuzov@math.nsc.ru](mailto:arbuzov@math.nsc.ru)

<sup>2</sup> ORCID: 0000-0003-2404-326X, [arbuzov@itp.nsc.ru](mailto:arbuzov@itp.nsc.ru)

<sup>3</sup> ORCID: 0000-0001-7874-039X, [dubnistchev@itp.nsc.ru](mailto:dubnistchev@itp.nsc.ru)

<sup>4</sup> ORCID: 0000-0003-3486-4459, [melexina-olga17@ya.ru](mailto:melexina-olga17@ya.ru)

<sup>5</sup> ORCID: 0009-0009-0759-8627, [mlapikov1@list.ru](mailto:mlapikov1@list.ru)

<sup>6</sup> ORCID: 0000-0001-8178-7607, [luka@itp.nsc.ru](mailto:luka@itp.nsc.ru)

## Abstract

The possibility of processing small-view hilbertograms by the Gershberg-Papoulis method to restore the refractive index of phase objects is discussed. The method consists in iterative transitions from estimating a function in the Fourier plane to estimating it in a coordinate space with an adjustment using a priori information. The spectrum of the function is determined on the entire frequency plane as an iterative process result. Numerical simulation of the refractive index reconstruction for various test functions was performed using the Gershberg-Papoulis method using Radon data known for four angles. Experimental studies on the Hilbert diagnostics example of reacting media (flames) in a high-speed shooting mode (up to 2000 frames per second) were performed using a four-angle tomographic complex implemented on the basis of an upgraded IAB-463M shadow device.

**Keywords:** Hilbert optics, optical tomography, the Gershberg-Papoulis method.

## References

1. Belozеров А. Ф. Оптические методы визуализации газовых потоков [Optical methods for visualization of gas flows], Kazan Technical University Publ., Kazan, 2007, 747 p. (in Russian)
2. Smirnov S. A. Преобразование оптических сигналов. Учебное пособие [Conversion of optical signals. Tutorial], SPbSU ITMO Publ., St. Petersburg, 2008, 113 p. (in Russian)
3. Васильев Л. А. Теневые методы [Shadow methods], Nauka Publ., Moscow, 1968, 400 p. (in Russian)
4. Settles G. S. Schlieren and shadowgraph techniques: visualizing phenomena in transparent media. Springer, 2001, 376 p.
5. Recent developments in schlieren and shadowgraphy / M. J. Hargather, G. S. Settles // 27th AIAA Aerodynamic Measurement Technology and Ground Testing Conference (28 June – 1 July 2010, Chicago, Illinois), Chicago, 2010, 12 p.
6. Dubnishchev Yu. N., Arbuzov V. A., Belousov P. P., Belousov P. Ya. Оптические методы исследования потоков [Optical methods for studying flows], Sib. Univ. Publ., Novosibirsk, 2003, 418 p. (in Russian)

7. Arbuzov V. A., Dubnishchev Yu. N. *Metody gil'bert-optiki v izmeritel'nykh tekhnologiyakh* [Hilbert-optics methods in measurement technologies], NSTU University Publ., Novosibirsk, 2007, 316 p. (in Russian)
8. Sakai H., Vanasse G. Hilbert transform in Fourier spectroscopy // *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 56 (1), 1966, pp. 131–132 (doi: 10.1364/JOSA.56.000131).
9. Dubnishchev Yu. N., Arbuzov V. A., Arbuzov E. V., Zolotukhina O. S., Lukashov V. V. Polychromatic diagnostics of the flame with Hilbert verification of the visualized phase structure // *Scientific Visualization*, Vol. 13(4), 2021, pp. 1–8 (doi:10.26583/sv.13.4.01).
10. Arbuzov V. A., Arbuzov E. V., Dubnishchev Yu. N., Lukashov V. V., Zolotukhina O. S. Optical diagnostics of hydrogen-air diffusion jet flame // *Journal of Engineering Thermophysics*, Vol. 31 (3), 2022, pp. 402–413 (doi: 10.1134/S1810232822030031).
11. Levin G. G., Vishnyakov G. N. *Opticheskaya tomografiya* [Optical tomography], Radio and Communications Publ., Moscow, 1989, 224 p. (in Russian)
12. Xiong Wan, Yiqing Gao, Qing Wang, Shuping Le, Shenglin Yu. Limited-angle optical computed tomography algorithms // *Optical Engineering*, Vol. 42 (9), 2003, pp. 2659–2669 (doi: 10.1117/1.1595104).
13. Gerchberg R. W. Super-resolution through error energy reduction // *Opt. Acta.*, Vol. 21 (9), 1974, pp. 709–720 (doi:10.1080/713818946).
14. Papoulis A. A. New algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation // *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 22 (9), 1975, pp. 735–742 (doi: 10.1109/TCS.1975.1084118).
15. Pikalov V. V., Melnikova T. S. *Nizkotemperaturnaya plazma. Tomografiya plazmy (tom 13)* [Low temperature plasma. Plasma tomography (volume 13)], Nauka Publ., Novosibirsk, 1995, 229 p. (in Russian)
16. Kravchuk A. S. *Osnovy komp'yuternoy tomografii: Posobiye dlya studentov* [Fundamentals of Computed Tomography: Student's Guide], Moscow, 1999, 151 p. (in Russian)
17. Pickalov V. V., Kazantsev D. I. New iterative reconstruction methods for fan-beam tomography // *Inverse Problems in Science and Engineering*, Vol. 26 (2), 2018, pp. 773–791 (doi: 10.1080/17415977.2017.1340946)