

# Компьютерная визуализация линейчатых поверхностей с мнимыми директрисами

В.А. Короткий<sup>1</sup>

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

<sup>1</sup> ORCID: 0000-0002-5266-4701, [ospolina@mail.ru](mailto:ospolina@mail.ru)

## Аннотация

В статье рассматривается метод конструирования линейчатых поверхностей, основанный на выделении их из эллиптической линейной конгруэнции (ЭЛК), заданной четырьмя скрещивающимися прямыми или коллинеарным соответствием плоских полей. Предложен проективно-графический алгоритм построения вещественной прямой, пересекающей мнимые директрисы ЭЛК. Алгоритм основан на использовании графического изображения мнимых точек в виде специального маркера, позволяющего при выполнении конструктивных построений использовать мнимые точки наравне с вещественными точками. Выделение поверхности из ЭЛК сводится к многократному применению алгоритма.

Доказана теорема о существовании пучка плоскостей, пересекающих линейчатую алгебраическую поверхность порядка  $k+2$  по алгебраическим кривым порядка  $k$  (теорема 1). Теорема позволяет конструировать каркас алгебраической поверхности четвертого порядка из прямых линий и кривых второго порядка.

Предложены варианты перехода от линейной конгруэнции, заданной четырьмя прямыми, к тождественной конгруэнции, заданной коллинеарными полями  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$ . Такой переход позволяет решить практически важную задачу конструирования линейчатой поверхности, проходящей через два конических сечения. Доказана теорема существования коллинеации  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$ , заданной начерченными в полях  $\Pi$ ,  $\Pi'$  кривыми второго порядка (теорема 2).

Рассмотрена двухосевая линейчатая поверхность с образующими постоянной длины. Показано, что такая поверхность выделяется из линейной конгруэнции с вещественными осями погружением в нее направляющего эллипса, эксцентриситет которого однозначно определяется величиной угла между осями конгруэнции (теорема 3). Технологическое преимущество подобных поверхностей, позволяющее рекомендовать их для использования в архитектуре и строительстве, заключается в том, что они монтируются из прямолинейных балок или стержней одного типоразмера.

Представлены примеры компьютерной визуализации линейчатых поверхностей с мнимыми и вещественными директрисами.

**Ключевые слова:** линейная конгруэнция, мнимые алгебраические элементы, маркер мнимых точек, направляющая кривая, линейчатая квадрака, коллинеарные поля.

## 1. Введение

Линейной конгруэнцией  $Kr(u, v)$  называют двухпараметрическое множество прямых, пересекающихся наперед заданные скрещивающиеся прямые  $u$ ,  $v$  (директрисы конгруэнции). Директрисы могут быть вещественными различными (гиперболическая

линейная конгруэнция, ГЛК), вещественными совпадающими (параболическая линейная конгруэнция, ПЛК) или мнимыми комплексно сопряженными (эллиптическая линейная конгруэнция, ЭЛК).

Один из методов конструирования линейчатых поверхностей состоит в выделении их из линейной конгруэнции посредством погружения в тело конгруэнции направляющей кривой линии. Например, если поверхность выделяется из  $Kg(u, v)$  указанием направляющей кривой второго порядка  $\tau$ , получаем алгебраическую линейчатую поверхность четвертого порядка с направляющими  $u, v, \tau$  [1].

Конструктивный способ выделения поверхности из ГЛК с директрисами  $u, v$  заключается в построении однопараметрического множества прямолинейных образующих искомой поверхности, проходящих через точки направляющей кривой  $\tau$  и пересекающих вещественные прямые  $u, v$ . Эта задача решается известными методами начертательной геометрии [1]. Заметим, что вместо направляющей кривой может быть использовано какое-либо метрическое условие. Например, линейчатая поверхность может быть выделена из ГЛК требованием постоянства длины образующих (см. п. 7).

Для выделения поверхности из ПЛК вводят в рассмотрение вспомогательную линейчатую квадрику  $\Phi$  и определяют ПЛК как множество прямых, пересекающих две бесконечно близкие (в пределе совпадающие) скрещивающиеся образующие  $u, v$  квадрики  $\Phi$ . Это позволяет определить ПЛК как семейство прямых, касающихся линейчатой квадрики в точках одной ее прямолинейной образующей [3]. Через произвольно указанную точку направляющей кривой  $\tau$ , погруженной в ПЛК, проходит единственная прямая  $p$ , касающаяся квадрики  $\Phi$  и пересекающая ее образующую  $u=v$ . Построение прямой  $p$  выполняется известными методами начертательной геометрии [1]. Однопараметрическое множество прямых  $p$  образует искомую линейчатую поверхность, выделенную из ПЛК.

Если требуется выделить поверхность из ЭЛК, то задача сводится к построению множества вещественных прямых (образующих искомой поверхности), каждая из которых, проходя через одну из точек направляющей кривой  $\tau$ , пересекает пару мнимых комплексно сопряженных прямых  $u \sim v$  (директрис ЭЛК). Методы классической начертательной геометрии в этом случае неприменимы, поскольку предполагают выполнение графических построений с участием мнимых точек и мнимых прямых.

Графические построения с участием мнимых элементов рассматривались как в трудах авторов 19 века [2], так и в современных исследованиях [3-6], но в них не ставилась и не решалась задача построения вещественной прямой, инцидентной наперед заданной точке пространства и пересекающейся с двумя наперед заданными мнимыми сопряженными скрещивающимися прямыми (директрисами ЭЛК). Например, в работе [3, стр. 74] указан алгоритм построения прямой, пересекающейся с мнимыми директрисами ЭЛК, но не учтено требование инцидентности данной точке.

**Научная новизна.** В статье предлагается проективно-графический алгоритм построения вещественной прямой, удовлетворяющей как условию инцидентности наперед заданной точке, так и условию пересечения с наперед заданными мнимыми директрисами ЭЛК. Для конструктивной реализации предложенного алгоритма используются средства компьютерной визуализации мнимых элементов [7] совместно с программным модулем [8-10], позволяющим вычерчивать кривые второго порядка, инцидентные любому наперед заданному набору как вещественных, так и мнимых точек и касательных [11].

**Актуальность работы** обусловлена тем, что мнимые алгебраические элементы (мнимые точки, мнимые прямые, мнимые алгебраические линии и поверхности) являются неотъемлемым атрибутом любых действий с алгебраическими многообразиями. Участие мнимых элементов в геометрических алгоритмах так же необходимо и естественно, как участие комплексных чисел в алгебраических преобразованиях. Вследствие этого проблема точной конструктивной реализации графических алгорит-

мов, содержащих действия с мнимыми алгебраическими фигурами, является актуальной.

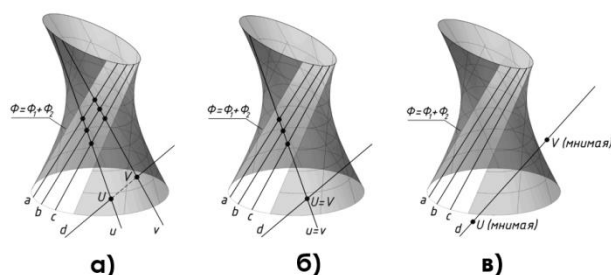
**Практическая значимость.** Предложенный в статье алгоритм выделения линейчатой поверхности из линейной конгруэнции с мнимыми директрисами позволяет конструировать архитектурные формы, перекрытия и оболочки, отличающиеся от традиционных поверхностей, опирающихся на вещественные оси, что расширяет область применения линейчатых конструкций в архитектурно-строительном проектировании.

Далее директрисы  $u, v$  будем называть осями конгруэнции.

## 2. Постановка задачи

Линейная конгруэнция может быть задана несколькими различными способами, в частности – своими осями  $u, v$  (способ 1) или четырьмя попарно скрещивающимися прямыми  $a, b, c, d$ , принадлежащими конгруэнции (способ 2). Оба способа геометрически эквивалентны: если даны 4 прямые  $a, b, c, d$ , принадлежащие конгруэнции, то могут быть найдены ее оси  $u, v$ .

Рассмотрим алгоритм построения осей  $u, v$  конгруэнции  $Kr(a, b, c, d)$ , заданной вторым способом. Вводим в рассмотрение линейчатую квадрику  $\Phi$ , вполне определенную тремя из данных прямых, например, прямыми  $a, b, c$ . Квадрика  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  состоит из полуквадрики  $\Phi_1$ , содержащей прямые  $a, b, c$ , и из сопряженной полуквадрики  $\Phi_2$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Построение осей конгруэнции  $Kr(a, b, c, d)$ : **а** – ГЛК; **б** – ПЛК; **в** – ЭЛК

Пусть прямая  $d$  пересекается с квадрикой  $\Phi$  в точках  $U, V$ . Тогда прямые  $u, v$  полуквадрики  $\Phi_2$ , проходящие через точки  $U, V$  – оси конгруэнции [3]. Если прямая  $d$  пересекается с  $\Phi$  в вещественных точках  $U, V$ , то оси  $u, v$  – вещественные прямые, а конгруэнция  $Kr(a, b, c, d)$  – гиперболическая (рис. 1, а). Если точки  $U, V$  совпадают (прямая  $d$  касается квадрики  $\Phi$ ), то получаем ПЛК с бесконечно близкими (в пределе совпадающими) скрещивающимися осями  $u=v$  (рис. 1, б). Если прямая  $d$  не пересекается с квадрикой  $\Phi$ , то точки  $U, V$  и проходящие через них образующие  $u, v$  полуквадрики  $\Phi_2$  – мнимые (рис. 1, в). В последнем случае получаем эллиптическую линейную конгруэнцию (ЭЛК), к которой известные методы выделения поверхности, пригодные для ГЛК и ПЛК, непосредственно не применимы.

Отсюда следует задача: *разработать графический алгоритм построения и визуализации линейчатой поверхности, выделяемой из ЭЛК посредством погружения в нее направляющей кривой  $\tau$ .*

Через любую точку  $T$  кривой  $\tau$  проходит единственная прямолинейная образующая  $t$  искомой поверхности, включенная в данную ЭЛК, следовательно, задача выделения поверхности из ЭЛК сводится к составлению алгоритма построения прямой линии, проходящей через данную точку  $T$  и пересекающей пару мнимых комплексно сопряженных прямых  $u \sim v$  (директрис ЭЛК), и к последующему многократному применению этого алгоритма к ряду точек  $T_i$  направляющей кривой  $\tau$ , где  $i$  – требуемое для точной визуализации количество образующих конструируемой поверхности.

### 3. Выделение из ЭЛК прямой, проходящей через данную точку

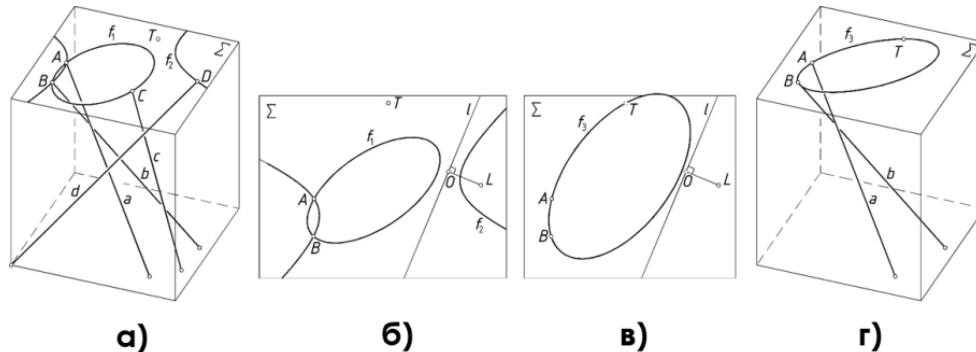
Пусть линейная конгруэнция задана четырьмя попарно скрещивающимися прямыми  $a, b, c, d$ . Требуется из конгруэнции  $Kr(a, b, c, d)$  выделить прямую, проходящую через наперед заданную точку  $T$  трехмерного пространства.

Описанным в п. 2 способом находим оси  $u, v$  конгруэнции, являющиеся трансверсальными прямыми  $a, b, c, d$ . Если эти трансверсали вещественные различные (ГЛК) или вещественные совпадающие (ПЛК), то известное из начертательной геометрии решение сводится к построению прямой, проходящей через данную точку  $T$  и пересекающей найденные оси [1].

Если трансверсали  $u, v$  мнимые, то их нельзя изобразить в явном виде. В этом случае задача сводится к построению проходящей через  $T$  вещественной прямой, пересекающей мнимые прямые  $u, v$ . Для построения такой прямой предлагается следующий алгоритм.

**Шаг 1.** Вводим в рассмотрение вспомогательные линейчатые квадрики  $\varphi_1(a, b, c)$  и  $\varphi_2(a, b, d)$ , вполне определенные тройками образующих  $(a, b, c)$  и  $(a, b, d)$  соответственно. Мнимые прямые  $u, v$  (оси ЭЛК), являясь трансверсальными заданных прямых  $a, b, c, d$ , пересекаются с обеими тройками образующих, следовательно, мнимые прямые  $u, v$  принадлежат обоим квадрикам.

**Шаг 2.** Через указанную в условии задачи точку  $T$  проводим произвольную плоскость  $\Sigma$  и начертим конические сечения  $f_1 = \varphi_1 \cap \Sigma, f_2 = \varphi_2 \cap \Sigma$  (рис. 2, а). Построение непрерывно начерченных коник  $f_1, f_2$  выполняется с помощью программного средства [8]. Коники  $f_1, f_2$ , проходящие через группы точек  $A, B, C$  и  $A, B, D$ , пересекаются между собой в вещественных точках  $A, B$  и в мнимых сопряженных точках  $U \sim V$  (здесь  $A, B, C, D$  – точки пересечения прямых  $a, b, c, d$  с плоскостью  $\Sigma$ ).



**Рис. 2.** Выделение из ЭЛК прямой, инцидентной точке  $T$ : **а** – исходные данные; **б** – построение маркера  $\{l, OL\}$  мнимых точек  $U \sim V$ ; **в** – построение коники, проходящей через мнимые точки  $U \sim V$ ; **г** – определитель квадрики, содержащей искомую прямую

**Шаг 3.** Мнимые прямые  $u, v$  принадлежат квадрикам  $\varphi_1, \varphi_2$ , следовательно, мнимые точки пересечения этих прямых с плоскостью  $\Sigma$  совпадают с мнимыми точками  $U \sim V$  пересечения конических сечений  $f_1, f_2$ .

Пересекаясь в вещественных точках  $A, B$  и в мнимых сопряженных точках  $U \sim V$ , коники  $f_1, f_2$  устанавливают на прямой  $l = UV$  одну и ту же эллиптическую инволюцию  $\sigma$  с мнимыми двойными точками  $U, V$ . Мнимые точки  $U \sim V$  изображаются маркером  $\{O, L\}$ , состоящим из центра  $O$  инволюции  $\sigma$  и точки Лагерра  $L$ , из которой инволюция  $\sigma$  проецируется ортогональным пучком прямых (рис. 2, б). Вещественная прямая  $l$ , проходящая через мнимые сопряженные точки  $U \sim V$ , является осью гомологии, связывающей коники  $f_1, f_2$ .

Построение маркера  $\{O, L\}$ , условно изображающего мнимые точки  $U \sim V$ , выполняется известным способом [11, 12]. Графическое изображение мнимых точек  $U \sim V$  в виде

маркера  $\{O, L\}$  позволяет использовать эти точки наравне с вещественными точками в последующих конструктивных построениях.

**Шаг 4.** Вводим в рассмотрение вспомогательную линейчатую quadriku  $\varphi_3(a, b, t)$ , где  $t$  – искомая прямая. Образующие  $a, b, t$  этой quadriki, согласно условию задачи, пересекаются с мнимыми осями  $u, v$  эллиптической конгруэнции  $Kr(a, b, c, d)$ , следовательно, оси  $u, v$  входят в состав quadriki  $\varphi_3$ . В сечении этой quadriki плоскостью  $\Sigma$  получаем конику  $f_3$ , проходящую через вещественные точки  $A, B, T$  и через мнимые сопряженные точки  $U \sim V$ , заданные на чертеже маркером  $\{O, L\}$  (рис. 2, в). Для вычерчивания коники  $f_3$  используется проективно-компьютерный алгоритм [11], составленный согласно [13, стр. 147].

**Шаг 5.** Непрерывно начерченная коника  $f_3$  и пересекающие ее в точках  $A, B$  прямолинейные образующие  $a, b$  однозначно определяют quadriku  $\varphi_3(a, b, t)$ , что позволяет найти искомую прямую  $t$  из условий ее инцидентности точке  $T$  и принадлежности семейству  $a, b, \dots$  образующих quadriki  $\varphi_3$  (рис. 2, г). Задача решена.

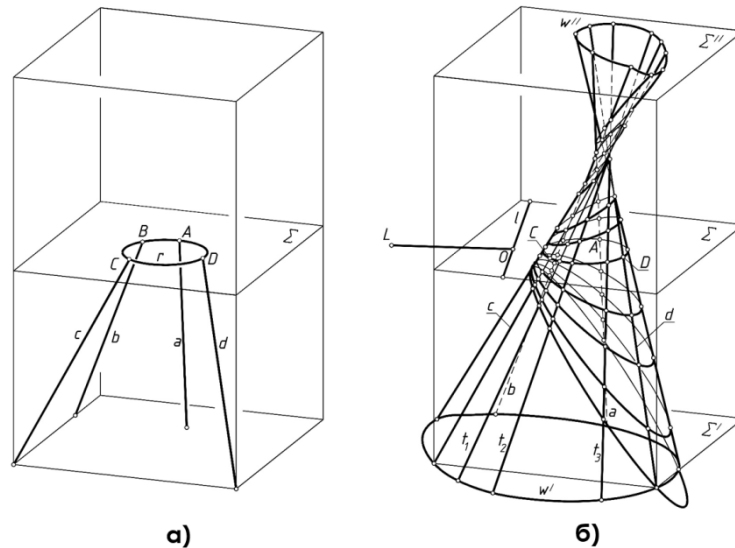
## 4. Выделение поверхности из ЭЛК

**Теорема 1.** Если алгебраическая линейчатая поверхность  $\Theta$  порядка  $k+2$  задана направляющей кривой  $e^k$  порядка  $k$  и двумя скрещивающимися прямолинейными направляющими  $u, v$  (вещественными или мнимыми сопряженными), пересекающимися с плоскостью кривой  $e^k$  в точках  $U, V$  (вещественных или мнимых сопряженных), то прямая  $UV$  (всегда вещественная) является осью пучка плоскостей, пересекающих поверхность  $\Theta$  по алгебраическим кривым порядка  $k$ .

**Доказательство.** Прямая  $UV$  пересекает направляющую кривую  $e^k$  в двух точках (вещественных или мнимых сопряженных), а также пересекает прямолинейные направляющие  $u, v$ , следовательно,  $UV$  представляет собой две совпавшие образующие поверхности  $\Theta$ . Линейчатая поверхность  $\Theta$  – алгебраическая поверхность порядка  $k+2$ , в сечении которой произвольной плоскостью, проходящей через  $UV$ , получаем кривую, распавшуюся на считаемую дважды прямую  $UV$  и кривую порядка  $k$ . Теорема доказана.

Визуализация линейчатой поверхности  $\Theta$ , выделяемой из ЭЛК  $Kr(a, b, c, d)$  посредством погружения в нее направляющей кривой, выполняется на основе теоремы 1 и многократного повторения алгоритма 1...5, изложенного в п. 3.

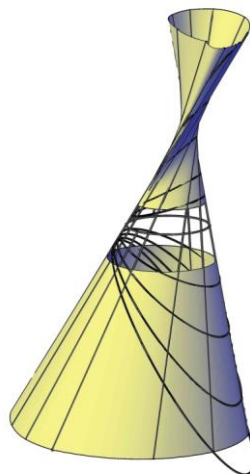
**Пример.** Пусть требуется сформировать линейчатую алгебраическую поверхность четвертого порядка  $\Theta$ , “натянутую” на пространственный каркас, заданный окружностью  $r$ , лежащей в плоскости  $\Sigma$ , и четырьмя скрещивающимися прямыми  $a, b, c, d$  (рис. 3, а). Условию задачи удовлетворяет поверхность, выделяемая из линейной конгруэнции  $Kr(a, b, c, d)$  посредством погружения в нее направляющей окружности  $r$ . В соответствии с алгоритмом 1...5 вводим в рассмотрение линейчатые quadriki  $\varphi_1(a, b, c)$  и  $\varphi_2(a, b, d)$ . Начертив вспомогательные конические сечения  $f_1 = \varphi_1 \cap \Sigma, f_2 = \varphi_2 \cap \Sigma$ , замечаем, что они пересекаются только в двух вещественных точках  $A, B$ , следовательно, оси  $u \sim v$  конгруэнции  $Kr(a, b, c, d)$  – мнимые (коники  $f_1, f_2$  на рис. 3 условно не показаны).



**Рис. 3.** Выделение поверхности из ЭЛК: **а** – исходные данные; **б** – каркас поверхности и маркер  $\{l, OL\}$  мнимых точек пересечения осей ЭЛК с плоскостью  $\Sigma$

Находим маркер  $l\{O, L\}$  мнимых точек  $U \sim V$  пересечения коник  $f_1$  и  $f_2$ . В этих точках мнимые оси  $u, v$  конгруэнции  $Kr(a, b, c, d)$  пересекаются с плоскостью  $\Sigma$  (рис. 3, б). В соответствии с алгоритмом 1...5 отмечаем на направляющей окружности  $r$  несколько точек и выделяем из  $Kr(a, b, c, d)$  несколько дополнительных прямых образующих  $t_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ) конструируемой поверхности  $\Theta$ , проходящих через отмеченные на  $r$  точки.

Согласно теореме 1, плоскости, проходящие через прямую  $l=UV$ , пересекают  $\Theta$  по коническим сечениям. Получаем каркас поверхности, состоящий из прямых линий и кривых второго порядка (см. рис. 3, б). Плоскости  $\Sigma', \Sigma''$ , не проходящие через  $l$ , пересекают  $\Theta$  по кривым четвертого порядка  $w', w''$ . На рис. 4 представлена визуализация поверхности.



**Рис. 4.** Алгебраическая линейчатая поверхность с мнимыми осями (визуализация)

## 5. Задание конгруэнции $Kr(a, b, c, d)$ с помощью коллинеации

Конгруэнция  $Kr(a, b, c, d)$ , заданная скрещивающимися прямыми  $a, b, c, d$ , может быть тождественным образом задана конгруэнцией  $Kr(\Pi \leftrightarrow \Pi')$  прямых, соединяющих соответственные точки коллинеарных полей  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$  (при условии, что в коллинеации

$\Pi \leftrightarrow \Pi'$  прямая  $l = \Pi \cap \Pi'$  соответствует сама себе) [3, 14]. Оси  $u, v$  конгруэнции  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$  (вещественные или мнимые) пересекаются с прямой  $l$  в вещественных или мнимых сопряженных точках  $U, V$ . Рассмотрим два варианта перехода от конгруэнции  $\text{Kgr}(a, b, c, d)$  к тождественной конгруэнции  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$ .

### 5.1. Вариант 1 (одна из данных прямых – самосоответственная)

Дана линейная конгруэнция  $\text{Kgr}(a, b, c, d)$ . Через одну из прямых (например, через  $d$ ) проведем произвольные плоскости  $\Pi, \Pi'$ . Прямые  $a, b, c$  высекают на плоскостях  $\Pi, \Pi'$  точки  $A, B, C$  и  $A', B', C'$ . Зададим коллинеарное соответствие полей  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$  тремя парами точек  $A \sim A', B \sim B', C \sim C'$  и прямой  $d = \Pi \cap \Pi'$ , которую будем полагать самосоответственной. В этом случае семейство прямых, соединяющих соответственные точки полей  $\Pi, \Pi'$ , есть линейная конгруэнция  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$  [3].

Покажем, что конгруэнции  $\text{Kgr}(a, b, c, d)$  и  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$  совпадают. Коллинеация  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$  индуцирует на прямой  $d$  проективитет с двойными точками  $U = U', V = V'$  (вещественными или мнимыми). Оси  $u, v$  (вещественные или мнимые) конгруэнции  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$  проходят через эти точки и пересекаются с прямыми  $a, b, c$ , следовательно, прямые  $u, v$  являются трансверсалиями прямых  $a, b, c, d$ , то есть осями конгруэнции  $\text{Kgr}(a, b, c, d)$ . Из совпадения осей следует совпадение конгруэнций.

Предложенный вариант перехода от  $\text{Kgr}(a, b, c, d)$  к  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$  может использоваться для выделения из конгруэнции  $\text{Kgr}(a, b, c, d)$  прямой  $t$ , проходящей через наперед заданную точку  $T$ . Через прямую  $d$  и точку  $T$  проводим плоскость  $\Pi$ . Через прямую  $d$  проводим еще одну (произвольную) плоскость  $\Pi'$ . Отмечаем точки пересечения  $A \sim A', B \sim B', C \sim C'$  прямых  $a, b, c$  с плоскостями  $\Pi, \Pi'$ . В коллинеации  $\Pi(A, B, C) \leftrightarrow \Pi'(A', B', C')$  с самосоответственной прямой  $d$  находим точку  $T'$ , соответствующую точке  $T$ . Через точки  $T \sim T'$  проводим искомую прямую  $t$ . Искомая прямая выделена из конгруэнции.

### 5.2. Вариант 2 (общий случай)

Дана линейная конгруэнция  $\text{Kgr}(a, b, c, d)$ . Вводим в рассмотрение линейчатые квадрики  $\phi_1(a, b, c)$  и  $\phi_2(a, b, d)$  и пересекающую их произвольную плоскость  $\Pi$ . Вычерчиваем конические сечения  $f_1 = \phi_1 \cap \Pi, f_2 = \phi_2 \cap \Pi$ , проходящие через тройки точек  $(A, B, C)$  и  $(A, B, D)$ . Здесь  $A, B, C, D$  – точки пересечения прямых  $a, b, c, d$  с плоскостью  $\Pi$ .

Коники  $f_1, f_2$  пересекаются в точках  $A, B$  и еще в двух точках  $U, V$  (вещественных или мнимых), через которые проходят оси  $u, v$  (вещественные или мнимые) конгруэнции  $\text{Kgr}(a, b, c, d)$ . Через прямую  $l = UV$  (всегда вещественную) проводим произвольную плоскость  $\Pi'$  и отмечаем точки  $A', B', C', D'$  пересечения лучей  $a, b, c, d$  с плоскостью  $\Pi'$ . Зададим коллинеарное соответствие полей  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$  тремя парами соответственных точек  $A \sim A', B \sim B', C \sim C'$  и самосоответственной прямой  $l = \Pi \cap \Pi'$ . Коллинеация  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$  индуцирует на  $l$  проективитет с двойными (самосоответственными) точками  $U, V$ . Семейство прямых  $a, b, c, \dots$ , соединяющих соответственные точки коллинеации  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$ , есть линейная конгруэнция  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$ , а полуквадрика  $\phi_1(a, b, c)$ , содержащая три прямые  $a, b, c$  конгруэнции  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$ , вся состоит из прямых этой конгруэнции.

Покажем, что прямая  $d$  включена в конгруэнцию  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$ . Предположим, что образующие полуквадрик  $\phi_1(a, b, c)$  и  $\phi_2(a, b, d)$  порождают две различные коллинеации. В этих коллинеациях совпадают двойные точки  $U, V$ . Кроме того, две общие прямые  $a, b$  квадрики  $\phi_1, \phi_2$  высекают в полях  $\Pi, \Pi'$  одни и те же пары соответственных точек  $A \sim A', B \sim B'$ . Четыре пары соответственных элементов двух коллинеаций совпадают, что означает совпадение коллинеаций. Отсюда следует, что все образующие полуквадрики  $\phi_1(a, b, c)$  и  $\phi_2(a, b, d)$ , в том числе прямая  $d$ , включены в одну и ту же конгруэнцию  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$ . Из совпадения четырех лучей  $a, b, c, d$  конгруэнций  $\text{Kgr}(a, b, c, d)$  и  $\text{Kgr}(\Pi \leftrightarrow \Pi')$  следует совпадение самих конгруэнций.

Предложенный вариант перехода от  $Kr(a, b, c, d)$  к  $Kr(\Pi \leftrightarrow \Pi')$  может использоваться для выделения из конгруэнции  $Kr(a, b, c, d)$  прямой  $t$ , проходящей через наперед заданную точку  $T$ . Проводим через  $T$  произвольную плоскость  $\Pi$ . Отметим точки  $A, B, C, D$  пересечения прямых  $a, b, c, d$  с плоскостью  $\Pi$ . Вычерчиваем сечения  $f_1(A, B, C) = \varphi_1(a, b, c) \cap \Pi$ ,  $f_2(A, B, D) = \varphi_2(a, b, d) \cap \Pi$ . Через прямую  $l$ , соединяющую точки  $U, V$  (вещественные или мнимые) пересечения коник  $f_1, f_2$ , проводим произвольную плоскость  $\Pi'$  и отмечаем точки  $A', B', C', D'$  пересечения прямых  $a, b, c, d$  с плоскостью  $\Pi'$ . Получаем коллинеацию  $\Pi(ABCD) \leftrightarrow \Pi'(A'B'C'D')$  с двойными точками  $U, V$ , лежащими на самосоответственной прямой  $l = \Pi \cap \Pi'$ . В этой коллинеации находим точку  $T'$ , соответствующую точке  $T$ . Искомая прямая  $t$  проходит через точки  $T, T'$ .

## 6. Линейчатая поверхность, проходящая через две данные коники

Линейная конгруэнция, заданная коллинеарными полями, позволяет решить практически важную задачу конструирования линейчатой поверхности, проходящей через пару наперед заданных конических сечений [14].

**Теорема 2.** Если в плоских полях  $\Pi, \Pi'$  начерчены произвольные конические сечения  $r, r'$  с произвольно отмеченными на них точками  $A, A'$ , то существуют всего два варианта коллинеаций  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$  с самосоответственной слабоинвариантной прямой  $l = \Pi \cap \Pi'$ , в которых  $r \leftrightarrow r', A \leftrightarrow A'$ .

**Доказательство.** Проводим касательные  $t_A, t'_A$  к данным коникам в точках  $A, A'$  (рис. 5). Из точек  $1 = t_A \cap l, 1' = t'_A \cap l$  проводим касательные  $t_B, t'_B$ . Отметив точки  $2 = AB \cap l, 2' = A'B' \cap l$ , проводим из этих точек касательные  $t_C, t_D, t'_C, t'_D$  к коникам  $r, r'$ . Получаем четырехсторонники  $(t_A, t_B, t_C, t_D)$  и  $(t'_A, t'_B, t'_C, t'_D)$  с вершинами  $(1, 2, P, Q, M, N)$  и  $(1', 2', P', Q', M', N')$ , описанные около коник  $r, r'$ . Согласно теореме Бриансона, прямые  $AB, CD$  и  $A'B', C'D'$ , соединяющие точки прикосновения, проходят через точки  $3 = QP \cap MN, 3' = Q'P' \cap M'N'$  пересечения диагоналей этих четырехсторонников (см. рис. 5). Прямые  $CD, AB$  и  $C'D', A'B'$ , согласно теории полюсов и поляра, инцидентны точкам  $1, 2$  и  $1', 2'$ , следовательно, в плоскостях  $\Pi$  и  $\Pi'$  получены полные четырехугольники  $MNPQ$  и  $M'N'P'Q'$ , несущие на своих сторонах гармонические группы точек [15].

Таким образом, соответствие плоских полей  $\Pi, \Pi'$ , заданное указанными на рис. 5 четверками касательных  $(t_A, t_B, t_C, t_D)$  и  $(t'_A, t'_B, t'_C, t'_D)$  или четверками точек  $(M, N, P, Q), (M', N', P', Q')$ , является коллинеацией (так как сохраняется прямолинейность, инцидентность и гармонизм), отвечающей условиям теоремы. В этой коллинеации коники  $r, r'$  взаимно соответственны, а прямая  $l = 12$  переходит в совпадающую с ней прямую  $l' = 1'2'$ . Пары соответственных точек  $1 \sim 1', 2 \sim 2', \dots$  не совпадают, поэтому  $l = l'$  – слабоинвариантная прямая. Возможны всего два варианта коллинеации:  $(t_A, t_B, t_C, t_D) \leftrightarrow (t'_A, t'_B, t'_C, t'_D)$  или  $(t_A, t_B, t_C, t_D) \leftrightarrow (t'_A, t'_B, t'_D, t'_C)$ . Теорема доказана.

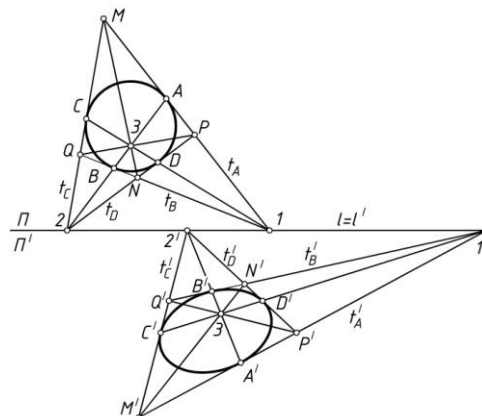


Рис. 5. К доказательству теоремы 2

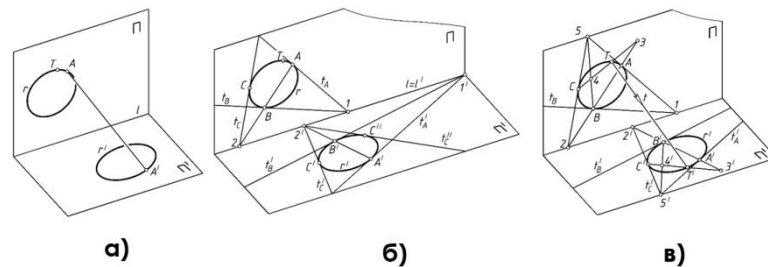


## 6.1. Алгоритм построения прямолинейных образующих

На основании теоремы 2 решается задача построения прямолинейных образующих алгебраической поверхности четвертого порядка, проходящей через коники  $r, r'$  и имеющей наперед заданную образующую  $AA'$ . Полагая, что коллинеация  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$  задана начерченными кониками  $r, r'$  и парой соответственных точек  $A \leftrightarrow A'$  на этих кониках, получаем, согласно теореме 2, конгруэнцию  $Kr(\Pi \leftrightarrow \Pi')$ . Для выделения из нее искомой поверхности следует указать на одной из коник несколько точек  $T_i$  и найти соответственные в коллинеации  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$  точки  $T'_i$ , где  $i$  – требуемое для точной визуализации количество образующих конструируемой поверхности. Укажем на конике  $r$  произвольную точку  $T$  (рис. 6, а) и рассмотрим алгоритм построения образующей  $t=TT'$ .

**Шаг 1.** Проводим касательные  $t_A, t'_A$  к коникам  $r, r'$  в точках  $A, A'$ . Из точек  $1=t_A \cap l, 1'=t'_A \cap l$  проводим касательные  $t_B, t'_B$ . Отметив точки  $2=AB \cap l, 2'=A'B' \cap l$ , проводим из этих точек касательные  $t_C, t'_C$  (рис. 6, б). Согласно теореме 2, коллинеарное соответствие полей  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$  (с самосоответственной прямой  $l$  и взаимно соответственными кониками  $r, r'$ ) вполне определено четверками прямых  $(t_A, t_B, t_C, AB) \leftrightarrow (t'_A, t'_B, t'_C, A'B')$ , в котором точки  $C \leftrightarrow C'$  взаимно соответственны.

*Примечание к шагу 1.* Другой возможный вариант коллинеации порождается соответственными прямыми  $(t_A, t_B, t_C, AB) \leftrightarrow (t'_A, t'_B, t''_C, A'B')$ . При этом соответствие  $C \leftrightarrow C'$  заменяется на соответствие  $C \leftrightarrow C''$  (см. рис. 6, б).



**Рис. 6.** Построение поверхности, проходящей через две коники: **а** – исходные данные; **б** – коллинеация  $\Pi$ - $\Pi'$  (два варианта); **в** – выделение образующей  $t$  из конгруэнции  $Kr(\Pi \leftrightarrow \Pi')$

**Шаг 2.** Через точку  $T$  проводим какую-либо вспомогательную прямую (например, прямую  $TC$ ) и отмечаем на ней точку  $3=TC \cap AB$  (рис. 6, в). Из условия сохранения сложного отношения  $(2AB3)=(2'A'B'3')$  находим точку  $3'$ .

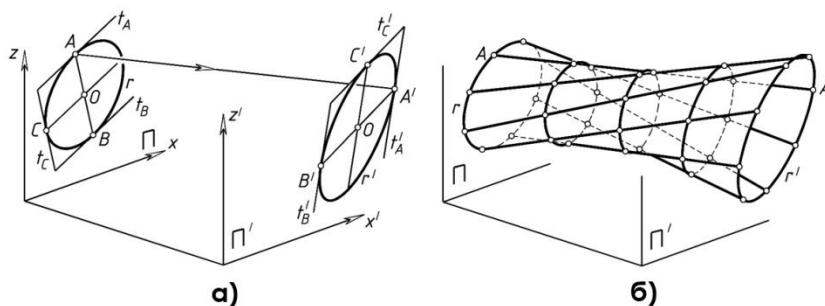
**Шаг 3.** На прямых  $B5$  и  $B'5'$  отмечаем точки  $4$  и  $4'$ . Из условия сохранения сложного отношения  $(CT43)=(C'T'4'3')$  находим точку  $T'$ . Непосредственной проверкой на компьютерном макете убеждаемся, что  $T'$  инцидентна конике  $r'$ . Соединяя точки  $T$  и  $T'$ , получаем образующую  $t$  (см. рис. 6, в).

Многочисленное применение алгоритма позволяет найти любое количество прямолинейных образующих искомой поверхности. Согласно теореме 1, пучок плоскостей, проходящих через  $l$ , пересекает эту поверхность по кривым второго порядка.

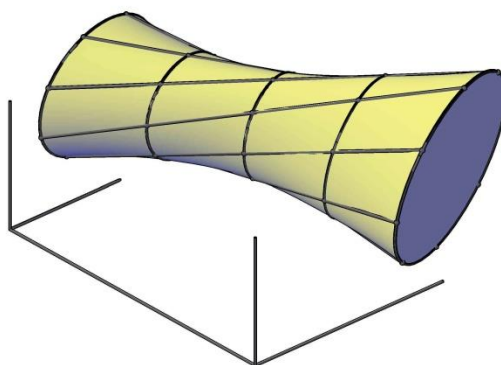
## 6.2. Частный случай (плоскости $\Pi, \Pi'$ параллельны)

Если плоскости  $\Pi, \Pi'$  параллельны, то прямая  $l$  становится несобственной, а проективитет вырождается в аффинное соответствие точечных полей  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$ , так как сохраняется простое отношение и параллелизм. Пусть, например, требуется “натянуть” линейчатую поверхность на каркас, заданный прямолинейной образующей  $AA'$  и кониками  $r, r'$ , лежащими в параллельных плоскостях  $\Pi(zx)$  и  $\Pi'(z'x')$ . Указывая в полях  $\Pi, \Pi'$  три пары соответственных касательных  $(t_A, t_B, t_C) \leftrightarrow (t'_A, t'_B, t'_C)$ , получаем аффинитет  $\Pi(r, A) \leftrightarrow \Pi'(r', A')$  (рис. 7, а). Прямые линии, соединяющие соответственные точки аффинных полей  $\Pi, \Pi'$ , образуют тело линейной конгруэнции  $Kr(\Pi \leftrightarrow \Pi')$ .

Выделяя из  $Kr(\Pi \leftrightarrow \Pi')$  несколько образующих искомой поверхности и используя теорему 1, получаем каркас алгебраической поверхности четвертого порядка, состоящий из семейства прямолинейных образующих и кривых второго порядка, лежащих в параллельных плоскостях (рис. 7, б). Визуализация поверхности представлена на рис. 8.



**Рис. 7.** Частный случай (аффинная коллинеация  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$ ): **а** – исходные данные; **б** – каркас поверхности образован кониками, лежащими в параллельных плоскостях

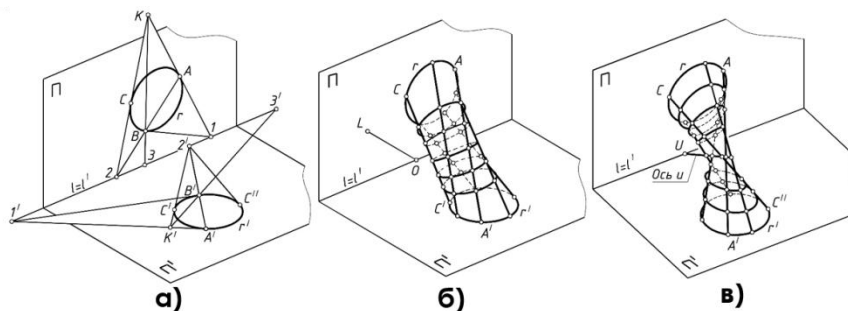


**Рис. 8.** Линейчатая поверхность с мнимыми осями (визуализация)

**Примечание к п. 6.2.** Если коники  $r, r'$  подобны и подобно расположены, то алгебраическая поверхность четвертого порядка вырождается в линейчатую квадрику.

### 6.3. Примеры

**Пример 1.** Построить линейчатую алгебраическую поверхность четвертого порядка, проходящую через коники  $r, r'$ , и имеющую наперед заданную образующую  $AA'$  (рис. 9).

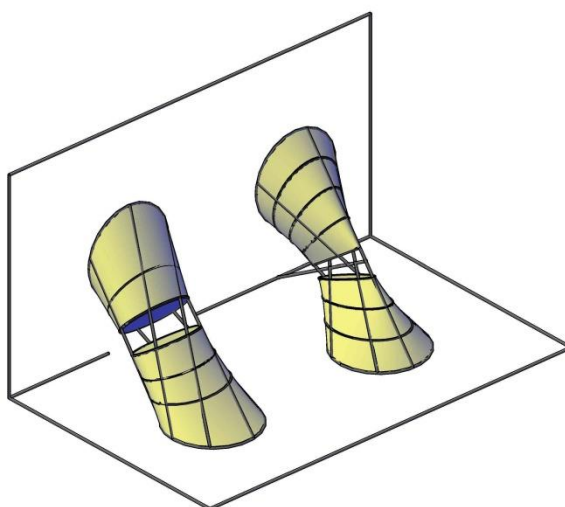


**Рис. 9.** К примеру 1: **а** – исходные данные; **б** – каркас поверхности с мнимыми осями (первый вариант коллинеации  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$ ); **в** – каркас поверхности с вещественными осями (второй вариант коллинеации  $\Pi \leftrightarrow \Pi'$ )

Проводим касательные к данным коникам и отмечаем точки касания  $A \sim A'$ ,  $B \sim B'$ ,  $C \sim C'$  (или  $C \sim C''$ ). Согласно теореме 2, получаем два варианта коллинеации:  $\Pi(ABCK) \leftrightarrow \Pi'(A'B'C'K')$  и  $\Pi(ABCK) \leftrightarrow \Pi'(A'B'C''K')$  (рис. 9, а).

В соответствии с первым вариантом, тройки точек  $l(1, 2, 3) \bar{\wedge} l'(1', 2', 3')$  определяют проективные точечные ряды на общем носителе  $l=l'$  с мнимыми двойными точками  $U=U'$ ,  $V=V'$ , изображаемыми маркером  $l\{OL\}$ . Мнимые оси  $u, v$  конгруэнции  $Kr(\Pi \leftrightarrow \Pi')$  проходят через эти точки (рис. 9, б). Используя рассмотренный в п. 6.1 алгоритм 1...3, находим несколько прямолинейных образующих конструируемой поверхности. Согласно теореме 1, поверхность несет на себе семейство конических сечений, плоскости которых проходят через  $l$  (см. рис. 9, б).

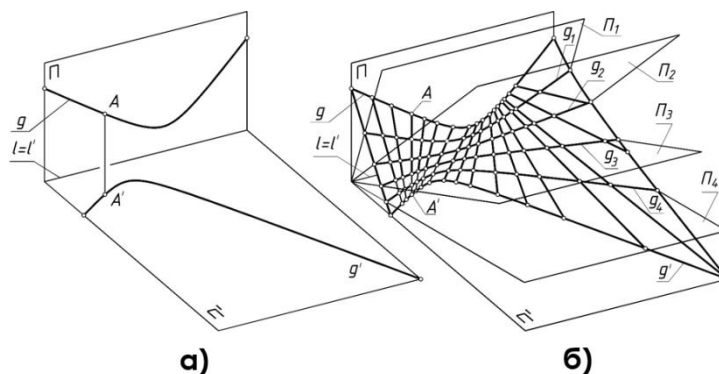
Рассматривая второй вариант коллинеации, получаем поверхность с вещественными осями  $u, v$ , также несущую на себе семейство кривых второго порядка (рис. 9, в). Визуализация обеих поверхностей представлена на рис. 10.



**Рис. 10.** Визуализация (к примеру 1)

**Пример 2.** Построить линейчатую алгебраическую поверхность четвертого порядка, проходящую через гиперболы  $g, g'$ , и имеющую наперед заданную образующую  $AA'$  (рис. 11, а).

Используя рассмотренный в п. 6.1 алгоритм 1...3, находим несколько прямолинейных образующих конструируемой поверхности. Согласно теореме 1, поверхность несет на себе семейство конических сечений (в данном примере – гипербол), плоскости которых  $\Pi_1 \dots \Pi_4$  проходят через  $l$  (рис. 11, б). Визуализация отсека поверхности представлена на рис. 12.



**Рис. 11.** К примеру 2: **а** – исходные данные; **б** – каркас поверхности

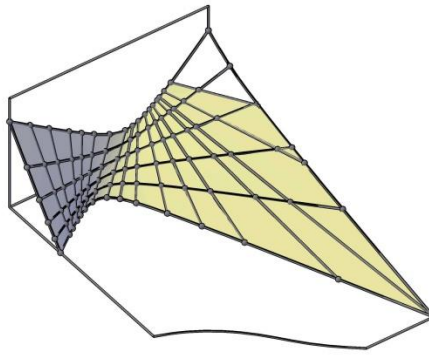


Рис. 12. Визуализация (к примеру 2)

## 7. Двухосевая линейчатая поверхность с образующими постоянной длины

Рассмотрим линейчатую поверхность  $\Omega$ , образованную движением прямой  $a$ , фиксированные точки  $M, N$  которой скользят по скрещивающимся прямым  $m, n$ . На конструируемую поверхность наложим условие  $|MN| = \text{const}$  (постоянство длины образующих). Покажем, что поверхность  $\Omega$  может быть выделена из ГЛК  $Kr(m, n)$  погружением в нее направляющего эллипса, эксцентриситет которого определяется только величиной угла между осями  $m, n$  конгруэнции.

**Теорема 3.** Если концы отрезка  $MN$  фиксированной длины  $\Delta$  скользят по скрещивающимся под углом  $\alpha$  прямым  $m, n$ , то точки отрезка описывают эллипсы, лежащие в плоскостях, параллельных прямым  $m, n$ , а середина отрезка  $MN$  описывает срединный (горловой) эллипс  $e$ , главные оси  $\delta_1, \delta_2$  которого равны  $\delta_1 = \text{tg}(\alpha/2)\sqrt{\Delta^2 - d^2}$ ,  $\delta_2 = \text{ctg}(\alpha/2)\sqrt{\Delta^2 - d^2}$ , где  $d$  – расстояние между осями  $m, n$  (без доказательства).

**Следствие 1.** Отношение главных осей  $\delta_1/\delta_2 = \text{tg}^2(\alpha/2)$  горлового эллипса определяется лишь величиной угла  $\alpha$  между осями  $m, n$ .

**Следствие 2.** Эллипс с отношением главных осей  $\delta_1/\delta_2 = \text{tg}^2(\alpha/2)$ , расположенный симметрично относительно направляющих прямых  $m, n$ , выделяет из гиперболической линейной конгруэнции  $Kr(m, n)$  алгебраическую линейчатую поверхность 4 порядка с образующими  $MN$  постоянной длины  $|MN| = \Delta = \sqrt{d^2 + \delta_1\delta_2}$ .

В частности, если  $\alpha = \pi/2$ , то, согласно следствию 1, горловой эллипс вырождается в окружность. Получаем дважды симметричную линейчатую поверхность с взаимно перпендикулярными направляющими  $m, n$ , горловой окружностью  $r$  и эллиптическими сечениями в плоскостях, параллельных срединной плоскости (рис. 13).

Технологическое преимущество подобных поверхностей, позволяющее рекомендовать их для использования в архитектуре и строительстве, заключается в том, что они монтируются из прямолинейных балок или стержней одного типоразмера.

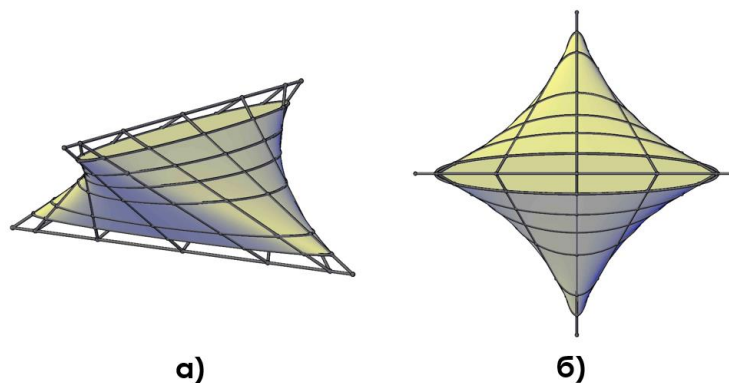


Рис. 13. Визуализация поверхности с взаимно перпендикулярными осями и образующими постоянной длины: **а** – аксонометрия; **б** – вид в плане

## 8. Заключение

Предложен компьютерный проективно-графический алгоритм построения и визуализации алгебраической линейчатой поверхности четвертого порядка, выделяемой из ЭЛК погружением в нее направляющей коники. Поверхность формируется как однопараметрическое множество прямых, пересекающих две наперед заданные мнимые сопряженные прямые – директрисы (оси) ЭЛК. Мнимые точки пересечения мнимых осей коллинеации с вещественной плоскостью направляющей коники изображаются специальным маркером, позволяющим использовать мнимые точки наравне с вещественными при выполнении конструктивных построений.

Доказана теорема о существовании пучка плоскостей, пересекающих линейчатую алгебраическую поверхность порядка  $k+2$  по алгебраическим кривым порядка  $k$ , что дает возможность конструировать каркас алгебраической поверхности четвертого порядка из прямых линий и кривых второго порядка.

Рассмотрены варианты перехода от конгруэнции, заданной четырьмя скрещивающимися прямыми, к конгруэнции прямых, соединяющих соответственные точки коллинеарных полей. Линейная конгруэнция, заданная коллинеарными полями, позволяет решить практически важную задачу конструирования линейчатой алгебраической поверхности четвертого порядка, проходящей через пару наперед заданных конечных сечений.

Рассмотрена двухосевая линейчатая поверхность с образующими постоянной длины. Показано, что такая поверхность выделяется из линейной конгруэнции с вещественными осями погружением в нее направляющего эллипса, эксцентриситет которого однозначно определяется величиной угла между осями конгруэнции. Технологическое преимущество подобных поверхностей, позволяющее рекомендовать их для использования в архитектуре и строительстве, заключается в том, что они монтируются из прямолинейных балок или стержней одного типоразмера.

Предложенные в работе компьютерные проективно-графические алгоритмы позволяют конструировать архитектурные формы, перекрытия и оболочки, отличающиеся от традиционных поверхностей, опирающихся на вещественные оси, что расширяет область применения линейчатых конструкций в архитектурно-строительном проектировании.

Представленные в статье рисунки выполнены с помощью программного продукта [8], позволяющего выполнять геометрически точное построение кривых второго порядка (КВП), инцидентных наперед заданным точкам и касательным. Алгоритмы, изложенные в [11], позволяют использовать программу [8] для построения КВП, инцидентных как вещественным, так и мнимым линейным элементам.

## Список литературы

1. Иванов, Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1998. – 157 с.
2. Суворов, Ф.М. Об изображении воображаемых точек и воображаемых прямых на плоскости и о построении кривых линий второй степени, определяемых с помощью воображаемых точек и касательных. – Казань: Типография императорского Университета. – 1884. – 130 с.
3. Пеклич, В.А. Высшая начертательная геометрия / В.А. Пеклич. – М.: Изд-во АСВ, 2000. – 344 с.
4. Пеклич, В.А. Мнимая начертательная геометрия / В.А. Пеклич. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 104 с.
5. Гирш А.Г. Комплексная геометрия – евклидова и псевдоевклидова. – М.: ООО «ИПЦ "Маска"», 2013. – 216 с.
6. V. Korotkiy. Construction of a Nine-Point Quadric Surface // Journal for Geometry and Graphics, Austria, Volume 22 (2018), No. 2, 183-193.

7. Короткий, В.А. Компьютерная визуализация кривой второго порядка, проходящей через мнимые точки и касающейся мнимых прямых / В.А. Короткий // Научная визуализация. – 2018. – V. 10, I. 1. – С. 56-68.
8. Короткий, В.А. Программа для ЭВМ «Построение кривой второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых» / В.А. Короткий // Свидетельство о государственной регистрации № 2011611961 от 04.03.2011 г.
9. Короткий, В.А. Синтетические алгоритмы построения кривой второго порядка / В.А. Короткий // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2014. – № 11. – С. 20-24.
10. Короткий, В.А. Универсальный компьютерный коникограф / В.А. Короткий, Л.И. Хмарова // Труды 26-й Международной научной конференции GraphiCon 2016 (19-23 сентября 2016), ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия. – С. 347-351.
11. Гирш, А.Г. Графические алгоритмы реконструкции кривой второго порядка, заданной мнимыми элементами / А.Г. Гирш, В.А. Короткий // Геометрия и графика. 2016. Т. 4. № 4. С. 19-30. DOI: 10.12737/22840.
12. Гирш, А.Г. Мнимые точки в декартовой системе координат / А.Г. Гирш, В.А. Короткий // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. № 3. С. 28-35. DOI: 10.12737/article\_5dce651d80b827.49830821.
13. Вольберг, О.А. Основные идеи проективной геометрии / О.А. Вольберг. – М.-Л.: Учпедгиз, 1949. – 188 с.
14. Обухова, В.С. Конструирование осевых поверхностей по наперед заданным условиям / В.С. Обухова // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Киев: Изд-во “Будивельник”, 1968. Вып. 6. С. 23-34.
15. Четверухин, Н.Ф. Проективная геометрия / Н.Ф. Четверухин. – М: Просвещение, 1969. – 368 с.

# Computer visualization of linear surfaces with imaginary directrices

V.A. Korotkiy<sup>1</sup>

South Ural State University (National Research University)

<sup>1</sup> ORCID: 0000-0002-5266-4701, [ospolina@mail.ru](mailto:ospolina@mail.ru)

## **Abstract**

The article discusses a method for constructing linear surfaces based on extracting them from an elliptical linear congruence (ELC), given by four intersecting lines or collinear correspondence of flat fields. A projective-graphic algorithm for constructing a real line intersecting the imaginary ELC directrix has been proposed. The algorithm is based on the use of an image of imaginary points in the form of a special marker, which allows for the imaginary points to be used along with real points when performing constructive constructions. Extracting a surface from an ELC is reduced to a repeated application of the algorithm.

A theorem has been proved on the existence of a pencil of planes intersecting a linear algebraic surface of the order  $k+2$  along algebraic curves of the order  $k$  (Theorem 1). The theorem allows constructing a skeleton of an algebraic surface of the fourth order from lines and curves of the second order. The variants of transition from linear congruence given by four straight lines to an identical congruence given by the collinear fields  $P \leftrightarrow P'$  have been proposed. This transition makes it possible to solve the practically important issue of designing a linear surface passing through two conical sections. The existence theorem for the collineation  $P \leftrightarrow P'$ , drawn in the fields  $P, P'$  by the curves of the second order has been proved (Theorem 2).

A biaxial linear surface with constant-length generators has been considered. It has been shown that such a surface is distinguished from a linear congruence with real axes by immersing a guiding ellipse into it, the eccentricity of which is uniquely determined by the angle between the congruence axes (Theorem 3). The technological advantage of such surfaces, allowing to recommend them for use in architecture and construction, is that they are mounted from rectilinear beams or rods of the same standard size.

Examples of computer visualization of linear surfaces with imaginary and real directrices have been presented.

**Keywords:** linear congruence, imaginary algebraic elements, imaginary point marker, directing curve, linear quadric, collinear fields.

## **References**

1. Ivanov G.S. Teoreticheskie osnovy nachertatel'noj geometrii [Theoretical Foundations of Descriptive Geometry]. M: Mashinostroenie, 1998 [in Russian].
2. Suvorov F.M. Ob izobrazhenii voobrazhaemyh toчек i voobrazhaemyh pryamyh na ploskosti i o postroenii krivyh linij vtoroj stepeni, opredelyaemyh s pomoshch'yu voobrazhaemyh toчек i kasatel'nyh [On the image of imaginary points and imaginary lines on the plane and on the construction of curved lines of the second degree, determined using imaginary points and tangents]. – Kazan': Tipografiya imperatorskogo Universiteta, 1884 [in Russian].
3. Peklich V.A. Vysshaja nachertatel'naja geometrija [The Highest Descriptive Geometry]. M: ASV, 2000 [in Russian].
4. Peklich V.A. Mnimaya nachertatel'naya geometriya [Imaginary Descriptive Geometry]. M: ASV, 2007 [in Russian].

5. Hirsh A.G. Kompleksnaya geometriya – evklidova i psevdoevklidova [Complex geometry – Euclidean and pseudo-Euclidean]. – M.: OOO «IPC "Maska"», 2013 [in Russian].
6. V. Korotkiy. Construction of a Nine-Point Quadric Surface // Journal for Geometry and Graphics, Austria, Volume 22 (2018), No. 2, pp. 183-193.
7. Korotkiy V.A. Komp'yuternaya vizualizaciya krivoj vtorogo poryadka, prohodyashchej cherez mnimye tochki i kasayushchejsya mnimyh pryamyh [Computer Visualization of a Curve of the Second Order passing through Imaginary Points and touching Imaginary Lines] // Scientific visualization, No 1, 2018, pp. 56-68 [in Russian].
8. Korotkiy V.A. Programma dlya EVM “Postroenie krivoj vtorogo poryadka, prohodyashchej cherez dannye tochki i kasayushchejsya dannyh pryamyh” [Construction of a curve of the second order passing through the data points and touching the data lines] // Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii № 2011611961 ot 04.03.2011 g [in Russian].
9. Korotkiy V.A. Sinteticheskie algoritmy postroeniya krivoj vtorogo poryadka [Synthetic algorithms for constructing a second-order curve] // Vestnik komp'yuternyh i informacionnyh tekhnologij, No 11, 2014, pp. 20-24 [in Russian].
10. Korotkiy V.A., Hmarova L.I. Universal'nyj komp'yuternyj konikograf [Universal computer conicograph] // Trudy 26-j Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii GraphiCon 2016, pp. 347-351 [in Russian].
11. Hirsh A.G., Korotkiy V.A. Graficheskie algoritmy rekonstrukcii krivoj vtorogo poryadka, zadannoj mnimymi elementami [Graphic Reconstruction Algorithms of the Second-Order Curve, given by the Imaginary Elements] // Geometriya i grafika, No 4, 2016, pp. 19-30 [in Russian].
12. Hirsh A.G., Korotkiy V.A. Mnimye tochki v dekartovoj sisteme koordinat [Imaginary points in a Cartesian coordinate system] // Geometriya i grafika, No 3, 2019, pp. 28-35 [in Russian].
13. Vol'berg O.A. Osnovnye idei proektivnoy geometrii [The Basic Ideas of Projective Geometry], Moscow-Leningrad: Gosudarstvennoe uchebno-pedagogicheskoe izdatel'stvo Publ., 1949 [in Russian].
14. Obuhova V.S. Konstruirovaniye osevyh poverhnostej po napered zadannym usloviyam [Design axial surfaces according to predetermined conditions] // Prikladnaya geometriya i inzhenernaya grafika, № 6, 1968, pp. 23-34. Kiev: Budivel'nik [in Russian].
15. Chetveruhin N.F. Proektivnaya geometriya [Projective Geometry], M: Prosveshchenie, 1969 [in Russian].