

Визуальная диагностика физических величин на основе метода функционально-воксельного моделирования

А.В. Толлок^{1,А}, М.А. Локтев^{2,В}, Н.Б. Толлок^{3,А}, А.М. Плаксин^{4,В}, С.А. Пушкарёв^{5,В}

^А МГТУ «СТАНКИН»

^В ИПУ РАН

¹ ORCID: 0000-0002-7257-9029, a.tolok@stankin.ru

² ORCID: 0000-0002-0465-1201, m.loktev@stankin.ru

³ ORCID: 0000-0002-5511-4852, nat_tolok@mail.ru

⁴ ORCID: 0000-0001-9390-8322, a.m.plaksin@gmail.com

⁵ ORCID: 0000-0002-4290-6455, sapushkarev@gmail.com

Аннотация

В работе предлагается метод функционально-воксельного моделирования (ФВМ) напряжений, возникающих под воздействием силовой или тепловой нагрузки в изотропном теле. Рассматриваются принципы моделирования единичного напряжения в как объёмного вектора - геометрического объекта, задаваемого по аналогии с обычным вектором двумя параметрами: функцией от величины и функцией от угла направления. Демонстрируются принципы построения функционально-воксельной модели, позволяющей на компьютере графически представить объёмный вектор в виде набора М-образов, отображающих локальные геометрические характеристики полученной функциональной области. Рассматриваются возможности построения полей напряжения от распределённых нагрузок посредством последовательного сложения единичного напряжения, распределённого в пространстве. Отдельно рассмотрены принципы построения единичного теплового напряжения и конструирования на его основе распределённых полей. Применяются существующие подходы для моделирования формы теплового расширения тела. Приводится сравнение получаемых зрительных образов напряжений и деформации с моделируемыми результатами в существующих расчётных модулях, базирующихся на МКЭ. Демонстрируются преимущества визуализации полученных результатов с позиции точности и наглядности представления. Рассматриваются перспективы такого подхода к моделированию наглядных физических величин применительно к визуальной диагностике геометрии детали.

Ключевые слова: Функционально-воксельный метод, М-образ, R-функции, объёмный вектор, локальные геометрические характеристики.

Введение

Несмотря на повышенный интерес к задаче визуализации моделируемых физических величин, до настоящего времени так и не предложены аппаратные или программные средства, которые позволяют предоставить адекватный результат. Даже получение значения возникшего напряжения в конкретной точке изотропного тела влечёт за собой расчёты относительно величин, которые поддаются измерению приборами [1,2] или вычисляются сложными дифференциальными уравнениями (МКЭ). Например, полученная деформация тела помогает промоделировать действующее при этом напряжённое поле. Тот факт, что напряжение является конструктивной величиной, влияющей на процесс проектирования, показывают развивающиеся новые направления по проектированию оптимальной геометрии конструкций относительно

моделируемых заранее напряжений. Таким образом, появляется необходимость в получении локального напряжения (напряжения от точечной нагрузки) как конструктивной единицы для минимальной площадки. Выделение такого элемента напряжения позволяет переходить к конструированию напряжённых полей любой конфигурации. Существующие расчётные модули САПР, такие как SolidWorks, PTC Creo, ANSYS и т.п. [3] не позволяют эффективно работать с локальным напряжением и ориентируются на моделирование сеточных регионов. При этом любые попытки моделирования точечной нагрузки приводят к сложной задаче сингулярности моделируемой сетки, что негативно влияет на устойчивость расчёта МКЭ (Рис.1). Равномерное сгущение сетки приводит к увеличению расчётного времени, а то и к нехватке оперативной памяти компьютера.

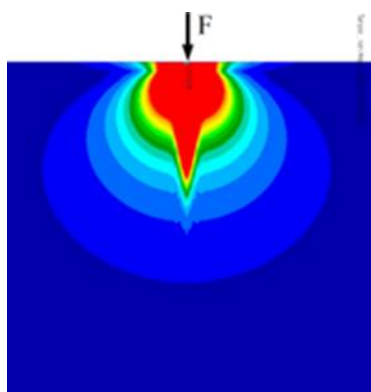


Рисунок 1: Пример результата расчёта напряжения после применения сингулярности сетки в точке приложения силы

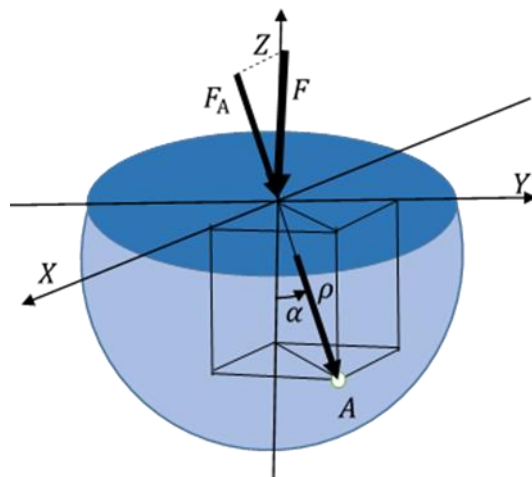


Рисунок 2: Распределение силового потока на единичной площадке окрестности точки приложения силы

Рассматриваемый в статье подход к построению модели локальных напряжений, является одним из направлений целого цикла исследований, проводимых проф. Толоком А.В. Он посвящен применению метода функционально-воксельного моделирования (ФВМ) [4] в решении инженерных задач жизненного цикла. До этого, рассмотрению подлежали такие задачи как поиск пути с препятствиями [5], задачи геометрического моделирования [6], задачи на вычисление интегральных значений объектов сложной геометрии [7], решение задач математического программирования [8] и т.п. Основой метода ФВМ является принцип организации символично-графической информации на компьютере, сочетающей аналитическую форму описания пространства функции $f(x_n) = 0$ с многомерной моделью воксельного представления ее локальных геометрических характеристик. Т.е. любую непрерывную функцию вида $f(x_m) = 0$ в заданном пространстве m можно представить как компьютерную модель, содержащую линейный многочлен $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_{m+1}x_{m+1} = 0$ (локальная функция) в каждой точке этого пространства, описывающий её касательную. При этом, компоненты нормали $(n_1, n_2, \dots, n_{m+1})$ приведены в соответствие с градацией цветовой палитры, и каждый такой компонент образует свой m -мерный воксельный образ. В результате пространство исходной функции размерностью m может быть представлено на компьютере количеством воксельных образов, равным $m + 1$. Такой подход позволяет получать для исследования дифференциальные и интегральные характеристики в точках функциональной многомерной области в компьютерном представлении [9].

В основе предложенного подхода к компьютерному моделированию локальных напряжений применяется теория сопротивления материалов [10], относящаяся к исследованию элементов тензора. С переходом на сеточные методы расчёта (МКЭ, МГЭ и т.п.) теоретические аспекты этого предмета незаслуженно сведены к студенческому

изучению и редко применяются в компьютерной практике. Это связано с тем, что подходы сопромата описывают принцип моделирования напряжения в отдельно взятой точке приложения силы и записывает закон для выбранного наклона заданного поперечного сечения. Остановившись на этом, теория сопромата не позволяет промоделировать переход от вектора приложенной силы к объёмному вектору напряжения, как геометрическому объекту, возникающему в твёрдой изотропной среде и позволяющему моделировать локальное напряжение.

1. Объёмный вектор

Введём геометрическое понятие *объёмного вектора* как единицы объёмного распределения вектора силы в твёрдой изотропной среде.

Определение. Под **объёмным вектором** следует понимать геометрический объект, задаваемый по аналогии с обычным вектором (как направленный отрезок из начальной точки, имеющий угол направления α и величину ρ), однако при этом для начальной точки определены функция направления $\alpha(\alpha)$ и функция величины $\rho(\rho)$.

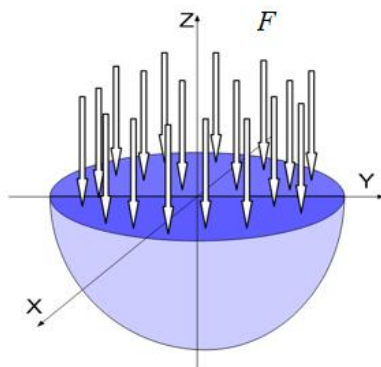


Рисунок 3: Направленный поток силы F

Например, промоделируем объёмный вектор локального напряжения, возникающего в твёрдом изотропном теле в результате воздействия вертикально приложенного вектора силы. В этом случае точка приложения силы считается начальной точкой объёмного вектора. Начнём с построения функции $\rho(\rho)$. Для этого необходимо определиться с некоторыми условностями, без которых невозможно обеспечить переход от непрерывного закона, характерного бесконечными приближениями, к его дискретной модели. Локализуем точку приложения силы некоторой единичной окрестностью, т.е. сферой с единичной площадью поверхности $S^1 = 4\pi R^2$, где $R = 1/(2\sqrt{\pi})$. Обобщим закон, добавив переменный параметр ρ как приращение радиуса распределения вектора силы $S = 4\pi(R + \rho)^2$. Открыв скобки и преобразовав правую часть, получим $S = 1 + 2\sqrt{\pi}\rho + 4\pi\rho^2 = 1 + \rho/R + 4\pi R^2$. Учитывая, что увеличение площади под приложенную силу действует обратно пропорционально на прилагаемую силу F , искомый закон ρ можно записать как $\rho(\rho) = 1/(1 + \rho/R + 4\pi R^2)$. Далее следует отметить, что в случае приложения силы F к поверхности твёрдого тела, рассматриваемая окрестность точки превращается в полусферу, а значит закон меняется на $\rho(\rho) = 2/(1 + \rho/R + 4\pi R^2)$ соответственно.

Теперь обратимся к построению закона $\alpha(\alpha)$. На рисунке 2 демонстрируется принцип проецирования силы F на перпендикуляр к главной площадке нормального напряжения. Перпендикуляр к такой площадке определяется направлением прямой, проходящей между рассматриваемой точкой тела A и точкой приложения силы F (начальной точкой объёмного вектора). Проекция силы $F_A = F \cos \alpha$. Далее следует вернуться к физическим условностям и понимать, что прилагаемая сила должна иметь не-

который радиус плоской окрестности приложения, в нашем случае радиус окрестности принимается за R .

На рисунке 3 демонстрируется на сечении приложение силы F в виде направленного потока к плоской площадке, ограниченной радиусом R . Принимая тело за бесконечный пучок ограниченных плоскостей, пересекаемых в точке A можно представить бесконечное множество поворачиваемых минимальных окрестностей с прилагаемым к ним однонаправленным потоком силы F (Рис.4а). На рисунке 4б демонстрируется отдельно взятый случай такого поворота окрестности относительно потока F , где наблюдается снижение количества элементов потока (в виде стрелок), попадающих на площадку окрестности при повороте на угол α . На рисунке 4б поворот показан стрелкой. Учитывая полученное свойство, проекция F_A приобретает следующий вид: $F_A = F \cos \alpha \cos \alpha = F \cos^2 \alpha$.



Рисунок 4: Изменение потока нагрузки при повороте единичной окрестности

Объединив функциональные законы $\rho(\rho)$ и $\alpha(\alpha)$ посредством умножения, получим общий функциональный закон построения объёмного вектора напряжения $\sigma = V(\rho(\rho), \alpha(\alpha))$:

$$\sigma = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{\rho}{R} + 4\pi \rho^2}, \quad R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \quad (1)$$

В том случае, если начало системы координат установить в точке приложения силы, тогда $\rho(x, y, z) = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$. При этом несложно вычислить и значение $\cos \alpha$.

2. Функционально-воксельная модель единичного напряжения

В работе [3] достаточно подробно изложен процесс построения функционально-воксельной модели для области аналитической функции. Он обеспечит переход аналитического непрерывного представления функции объёмного вектора σ к дискретному - функционально-воксельному компьютерному представлению. При этом создаётся компьютерная организация воксельных образов, обеспечивающих описание области функции объёмного вектора на уровне представления её локальными геометрическими характеристиками. На рисунке 5 для наглядности демонстрируется пример двумерного представления центрального сечения в плоскости xOz объёмного вектора в виде четырёх образов-моделей (М-образов). Первых два М-образа хранят информацию о компонентах нормали n_1 и n_2 по осям Ox и Oz , третий М-образ представляет значения компоненты n_3 для оси значений σ , а четвёртый М-образ является компонентой n_4 и обеспечивает необходимую информацию для определения положения нормали на области функции. При этом функция $\sigma = V(\rho(\rho), \alpha(\alpha))$ подменяется локальной функцией вида

$$\sigma = \frac{n_4}{n_3} - \frac{n_1}{n_3} x - \frac{n_2}{n_3} z, \text{ where } n_l = \frac{2(c_l - \frac{P}{2})}{P}, \quad l=1...4, \quad P=256 - \text{палитра полутона.} \quad (2)$$

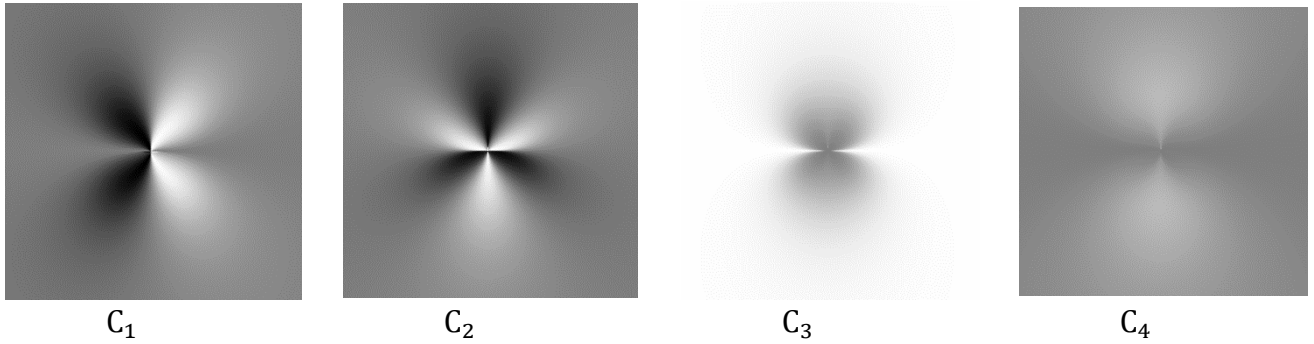


Рисунок 5: М-образы, отображающие локальные геометрические характеристики для единичного нормального напряжения

Вычисление σ по формуле (2) позволяет рассчитать палитру для образа значений единичного напряжения:

$$c_{i,j}^l = \frac{256\sigma_{i,j}}{F}. \quad (3)$$

На рисунке 6а демонстрируется образ нормальных значений для единичного напряжения, распределённых по градации тона.

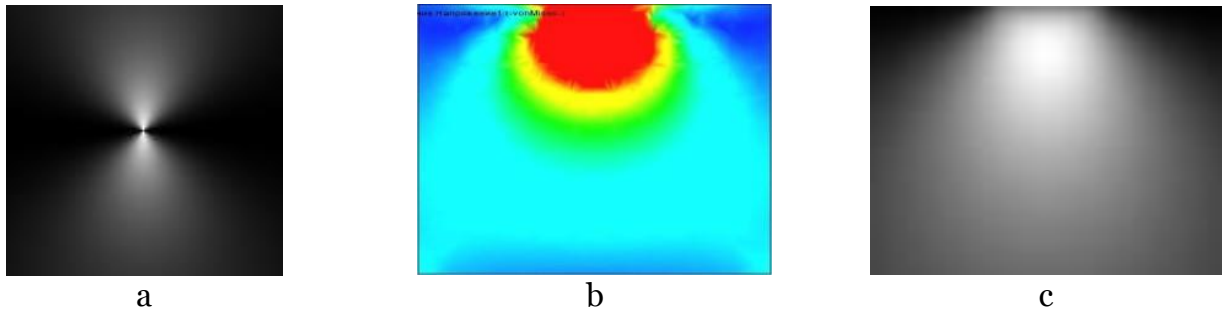


Рисунок 6: Визуализация нормального напряжения при локализации силовой нагрузки: а) Образ единичного напряжения методом ФВМ, б) Образ напряжения при локализации нагрузки методом МКЭ, в) распределение единичного вектора по локальному участку приложения силы методом ФВМ.

Рисунок 6б представлен для сравнения. Он получен на сетке МКЭ при попытке задания минимального участка приложения силы. Понятно, что довести такую локализацию до единственной точки как это делается в ФВМ не представляется возможным, однако решить обратную задачу приведения единичного напряжения в точку (рис.6а), полученной ФВМ к распределению на некоторой области минимального участка не составит труда, поскольку предусматривается лишь сложение значений областей единичных напряжений с учётом их пространственного расположения. На рисунке 6в демонстрируется распределение единичных напряжений для локального участка нагружения. При этом следует отметить, что результаты схожи с рисунком 6б, но образ (6в), полученный суммой единичных напряжений является более привлекательным, поскольку выглядит непрерывно гладким в соответствии с самим физическим законом и его образ стабилен к изменению шага дискретизации пространства и не зависит от формы элемента моделируемой для МКЭ сетки.

3. ФВ-модель касательного единичного напряжения

Поскольку касательное напряжение ортогонально нормальному, то модель объёмного вектора $\tau = V(\rho(\rho), \alpha(\alpha))$ принимает вид

$$\tau = \frac{F \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2\frac{\rho}{R} + 4\pi\rho^2}, \quad R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \quad (4)$$

При этом, М-образы создаваемой ФВ-модели отображают соответствующие локальные геометрические характеристики на рассматриваемой области функции (Рис.7).

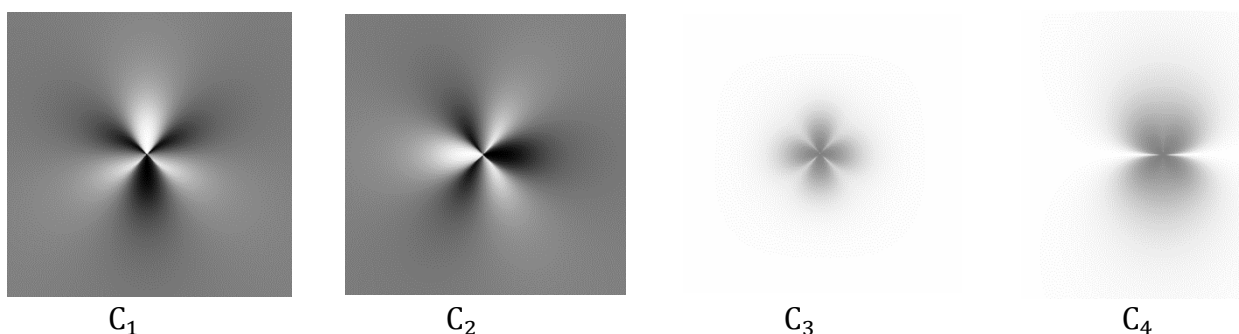


Рисунок 7: М-образы, отображающие локальные геометрические характеристики для единичного касательного напряжения

На рисунке 8 по аналогии с шестым рисунком демонстрируются последовательно результаты моделирования образов касательных напряжений, приложенных к минимальной площадке внутри тела. Рисунок 8а получен на основе М-образов и локальной функции

$$\tau = \frac{n_4}{n_3} - \frac{n_1}{n_3} x - \frac{n_2}{n_3} z, \text{ where } n_l = \frac{2(c_l - \frac{P}{2})}{P}, l=1...4, P=256 - \text{палитра полутона} \quad (5)$$

Образ на рисунке 8б изображает результат отображения образа касательных напряжений для локальной нагрузки, промоделированный методом МКЭ. Красным цветом выделяется область максимальных положительных значений функции τ , а синей отрицательных - минимальных. Аналогичное моделирование средствами ФВМ позволяет получить образ схожий по содержанию, но только с более явно выраженной гладкой формой образуемой поверхности напряжения.



Рисунок 8: Визуализация касательного напряжения при локализации силовой нагрузки: а) Образ единичного напряжения методом ФВМ, б) Образ напряжения при локализации нагрузки методом МКЭ.

4. Температурная единица напряжения

Для построения изображения единицы температурного напряжения можно воспользоваться правилами построения объёмного вектора, принципы которого изложены в первом пункте. При этом следует учитывать отсутствие направления прилагаемой температуры, а значит функция $\alpha(\alpha) = 0$, а величина приложенной к поверхности тела температуры позволяет применить функцию величины $\rho(\rho)$ для моделирования распределения напряжения в теле. Аналитически объёмный вектор для единицы температурного напряжения можно записать:

$$\sigma_{\theta} = \frac{2\theta}{1 + 2\frac{\rho}{R} + 4\pi\rho^2}, \quad R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

где θ – температура, приложенная в точке на границе тела.

Функционально-воксельная модель определяется по подобию с напряжением, возникающим от силовых воздействий и приводит к аналогичной локальной функции

$$\sigma_{\theta} = \frac{n_4}{n_3} - \frac{n_1}{n_3}x - \frac{n_2}{n_3}z,$$

где

$$n_l = \frac{2\left(C_l - \frac{P}{2}\right)}{P}$$

, $l=1\dots4$, $P=256$ – палитра полутона.

На рисунке 9 представлены М-образы, характеризующие локальные геометрические характеристики на рассмотренной области.

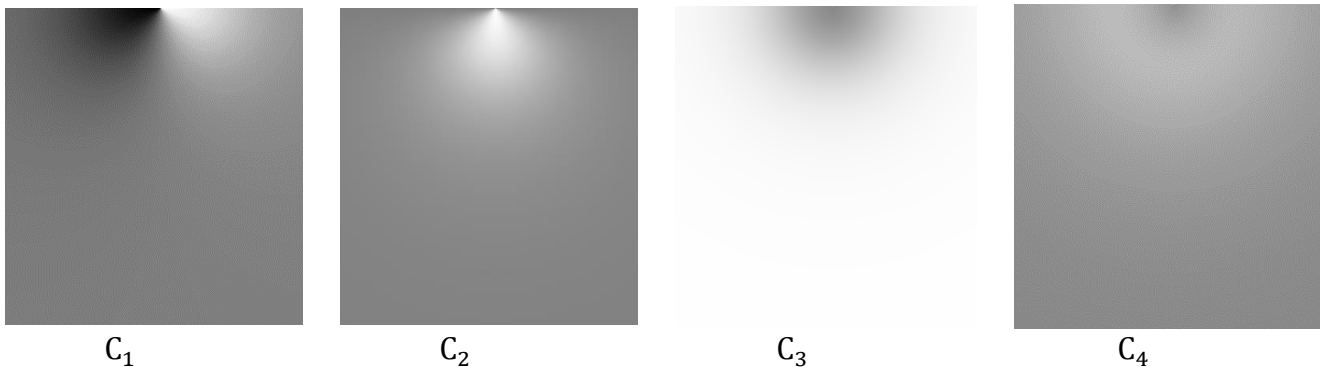
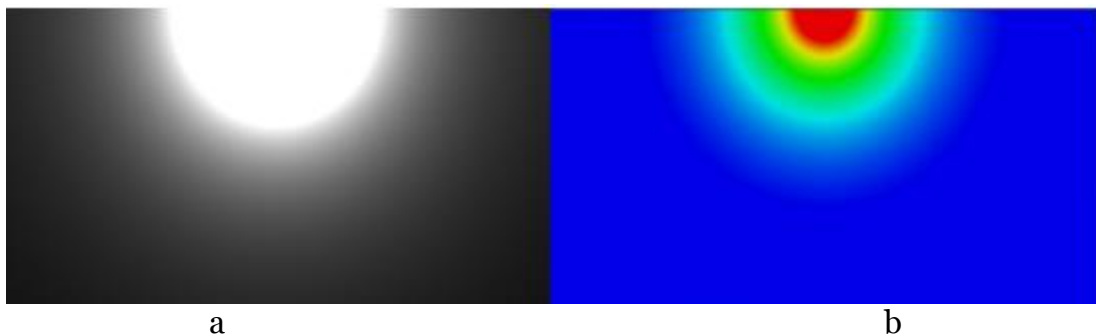


Рисунок 9: М-образы, отображающие локальные геометрические характеристики для единичного температурного напряжения

Рисунок 10а демонстрирует результат моделирования образов температурного напряжения, приложенного в точке поверхности изотропного тела предложенным подходом. Для визуального сравнения полученных результатов расчёта модели по аналогии с предыдущими случаями приводятся результаты расчёта той же задачи методом МКЭ (Рис.10б). Распределение температурной нагрузки осуществляется обыкновенным суммированием точечных нагрузок, равномерно распределённых вдоль выбранного направления. На рисунках 10 в,г демонстрируется результат распределения тепловой нагрузки вдоль оси Ox для обоих подходов соответственно. Результаты показывают идентичность формы получаемой поверхности температурного распределения в обоих случаях.



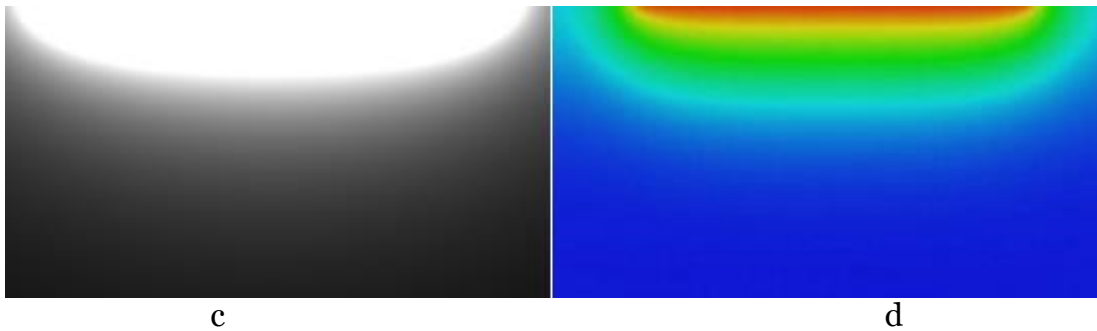


Рисунок 10: Примеры визуализации результатов моделирования теплового напряжения: а) Расчёт теплового напряжения для температуры, приложенной в точке методом МКЭ, б) Метод ФВМ для той же задачи, в) Расчёт теплового напряжения для распределённой температуры методом МКЭ, г) Метод ФВМ для той же задачи.

5. Моделирование локального теплового расширения

Тепловое расширение материала является достаточно важным параметром для любых механических процессов. Её учёт необходим в различных технологиях, связанных с точностью обработки материала и т.п. Рассмотрим задачу моделирования формы теплового расширения для возможности визуальной диагностики.

Исходя из полученной функционально-воксельной модели, позволяющей получать значения σ_θ для каждой точки рассматриваемой области без особых сложностей моделируется форма дополнительного относительного объёма при предполагаемом расширении материала в зависимости от температурных значений:

$$\Delta V = \alpha_V V \sigma_\theta,$$

где α_V – коэффициент температурного расширения.

На рисунке 11а,б приводится пример результата моделирования формы температурного расширения предложенным методом и методом КЭ на триангулированной сетке для визуального сравнения. При этом результат в обоих случаях получен в сравнимый временной период расчёта. Наблюдается очевидное отличие в наглядности представления одного и того же результата для случая применения воксельной (рис. 11а) и полигональной (рис.11б) модели.

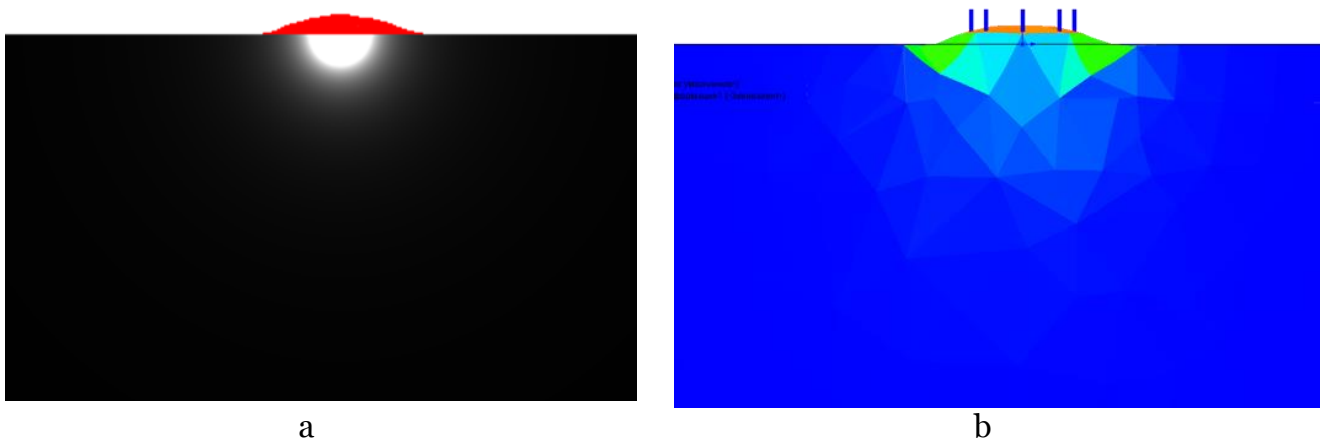


Рисунок 11: Примеры визуализации результатов моделирования теплового расширения: а) Расчёт сечения формы теплового расширения материала для температуры, приложенной в точке методом ФВМ, б) Расчёт сечения формы теплового расширения материала для температуры, локализованной малой окрестностью методом МКЭ.

На рисунке 12 приводится пример пространственного моделирования формы теплового расширения, построенного функционально-воксельным методом как одно из средств визуальной диагностики теплового процесса.

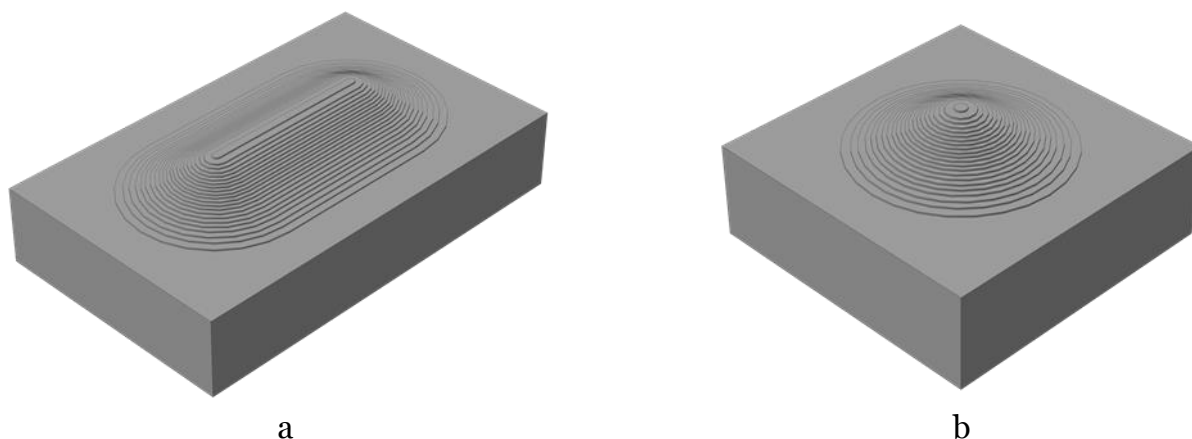


Рисунок 12: Примеры построения формы теплового расширения: а) Для равномерно распределённого теплового нагружения, б) Для точечного теплового нагружения.

6. Заключение

В данной работе рассматриваются средства локальной геометрии в компьютерном представлении для моделирования физических величин. На современном этапе геометрическое моделирование сопровождает инженерные задачи, ограничиваясь процедурой построения конечно-элементной сетки и её корректировки. Далее в расчёт вступают методы, относимые к математической физике, основанные построении сложных дифференциальных уравнениях. При этом локальная (дифференциальная) геометрия, которая предназначена для дальнейшего этапа моделирования физических величин на минимальных участках объекта пока не получила своего компьютерного представления. Основным преимуществом предложенного подхода является отсутствие в расчётах дифференциальных уравнений сеточного разбиения, применяемых в МКЭ. Предложенная в ФВМ дискретизация пространства функции в своей основе содержит получение дифференциальных характеристик, позволяющих моделировать сложные физические процессы простыми алгебраическими выражениями законов. Дополнительными преимуществами предложенного подхода также можно считать возможность значительного упрощения расчёта в исследуемой точке пространства, а также возможность распараллеливания вычислительного процесса существующими простейшими средствами. Перспективой дальнейшего исследования является разработка средств, позволяющих моделировать более сложные постановки задач для инженерных расчётов на основе разрабатываемого подхода.

Список литературы

- [1] Устройство для измерения механических напряжений в металлических изделиях // Патент РФ № 2079825. 1997. Жуков С.В., Жуков В.С.
- [2] Способ определения механических напряжений и устройство для его осуществления // Патент РФ № 2195636. 2001. Жуков С.В., Жуков В.С., Копица Н.Н.
- [3] А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева ANSYS в руках инженера: Практическое руководство / М. Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. – 272 с.
- [4] Толлок А.В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании. – Москва.: Физматлит, 2016. – 105 с.
- [5] Grigoryev S.N., Tolok N.B., Tolok A.V. Local Search Gradient Algorithm Based on Functional Voxel Modeling // Programming and Computer Software. 2017. Vol. 43, No. 5. С. 300–306.

- [6] *Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И., Толок А.В.* R-функции в аналитическом проектировании с применением системы «РАНОК» // Вестник МГТУ «Станкин». Научный рецензируемый журнал. М.: МГТУ «Станкин». №4(12). 2010. С.139-151
- [7] *Толок А.В., Силантьев Д.А., Лоторевич Е.А., Пушкарёв С.А.* Воксельно-математическое моделирование при решении задач определения площади для поверхностей деталей // Информационные технологии в проектировании и производстве №3, 2013, С 29-33.
- [8] *Tolok A.V., Tolok N.B.* Mathematical Programming Problems Solving by Functional Voxel Method // Automation and Remote Control. 2018. Volume 79, № 9. pp 1703–1712.
- [9] *Толок Н.Б., Толок А.В.* Функционально-воксельный метод компьютерных вычислений // Научная визуализация. М.: МИФИ. 2017. Т. 2, вып. 9. С. 1-12 <http://sv-journal.org/2017-2/01.php?lang=ru>
- [10] *Старовойтов Э. И.* Сопротивление материалов. — М.: Физматлит, 2008. — С. 384. — 1000 экз. — [ISBN 978-5-9221-0883-6](https://www.isbn-international.org/product/978-5-9221-0883-6).

Visual diagnostics of physical quantities based on the functional-voxel modeling method

A.V. Tolok^{1,A}, M.A. Loktev^{2,B}, N.B. Tolok^{3,A}, A.M. Plaksin^{4,B}, S.A. Pushkarev^{5,B}

^A MSTU "STANKIN"

^B ICS RAS

¹ ORCID: 0000-0002-7257-9029, a.tolok@stankin.ru

² ORCID: 0000-0002-0465-1201, m.loktev@stankin.ru

³ ORCID: 0000-0002-5511-4852, nat_tolok@mail.ru

⁴ ORCID: 0000-0001-9390-8322, a.m.plaksin@gmail.com

⁵ ORCID: 0000-0002-4290-6455, sapushkarev@gmail.com

Abstract

The paper proposes a method of functional voxel modeling (FVM) of stresses arising under the influence of a force or heat load in an isotropic body. We consider the principles of modeling the unit stress in a volume vector a geometric object, set by analogy with the normal vector with two parameters: the function of the value and the function of the angle of direction. The principles of constructing a functional-voxel model are demonstrated that allows a computer to graphically represent a three-dimensional vector as a set of M-images displaying local geometric characteristics of the obtained functional area. The possibilities of constructing stress fields from distributed loads by means of sequential addition of a single stress distributed in space are considered. The principles of constructing a single thermal stress and constructing distributed fields based on it are considered separately. Existing approaches are used to model the shape of thermal expansion of the body. The obtained visual images of stresses and strains are compared with the simulated results in the existing computational modules based on FEM. The advantages of visualizing the results obtained from the standpoint of accuracy and clarity of representation are demonstrated. The prospects of such an approach to modeling visual physical quantities in relation to the visual diagnostics of the part geometry are considered.

Keywords: Functional-voxel method, M-image, R-functions, three-dimensional vector, the local geometric characteristics.

References

- [1] Device for measuring mechanical stresses in metal products // RF Patent No. 2079825. 1997. Zhukov S. V., Zhukov V. S.
- [2] Method for determining mechanical stresses and a device for its implementation // RF Patent No. 2195636. 2001. Zhukov S. V., Zhukov V. S., Kapitsa N. N.
- [3] *A.B. Kaplun, E.M. Morozov, M.A. Olfepyeva* ANSYS in the hands of an engineer: Practical guide/ M. Book house «LIBROKOM», 2015. – 272 p.
- [4] *Tolok A.V.* Functional-voxel method in computer modeling. – Moscow.:Phismatlit, 2016. 105 p.
- [5] *Grigoryev S.N., Tolok N.B., Tolok A.V.* Local Search Gradient Algorithm Based on Functional Voxel Modeling // Programming and Computer Software. 2017. Vol. 43, No. 5. C. 300–306.
- [6] *Maksimenko-Sheyko K. V., Sheyko T. I., Tolok A. V.* R-function in the analytical design using a system of "RANOK" / / Vestnik MSTU "Stankin". Scientific peer-reviewed journal. M.: MSTU "Stankin". №4(12). 2010. P. 139-151

- [7] Tolok, A.V., Silantyev D. A., Lotarevich E. A., Pushkarev S. A. Voxel-mathematical modelling at the solution of problems of determining the area of surfaces // Information technologies in designing and manufacturing No. 3, 2013, 29-33.
- [8] Tolok A.V., Tolok N.B. Mathematical Programming Problems Solving by Functional Voxel Method // Automation and Remote Control. 2018. Volume 79, № 9. pp 1703–1712.
- [9] Tolok N.B., Tolok, A.V., Functional voxel method, computing / Scientific visualization. M.: MEPhI. 2017. Vol. 2, vol. 9. P. 1-12 <http://sv-journal.org/2017-2/01.php?lang=ru>
- [10] Starovoitov E. I. Strength of materials. — M.: Phismatlit, 2008. — P. 384. — 1000 copies. — ISBN 978-5-9221-0883-6