

# Визуализация дисперсионных границ оценок поляризационных параметров излучения на сфере Пуанкаре

В.И. Смирнов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
ORCID: 0000-0002-3047-988X, [smirnovvi-mpei@yandex.ru](mailto:smirnovvi-mpei@yandex.ru)

## Аннотация

Методами параметрической теории информации исследованы минимальные дисперсионные границы оценок параметров поляризации частично поляризованного квазимонохроматического излучения в поляриметрической схеме с анализатором и фазовым компенсатором в условиях аддитивно-мультипликативного нормального шума. Приведены картины распределений плотности информации о параметрах Стокса в координатах угла поворота анализатора и фазового сдвига компенсатора. Анализ этих распределений позволяет найти наиболее выгодные в метрологическом отношении планы измерений. Рассчитаны матричные дисперсионные границы различных параметров поляризации для равномерного плана и других 6-ти, 5-ти и 4-х точечных планов измерений. Рассчитаны предельные погрешности оценок степени поляризации. Результаты анализа подтверждены методом численного моделирования. Приведены картины распределений дисперсионных границ оценок степени поляризации на сфере Пуанкаре. С помощью разработанной методики, основанной на параметрической теории информации, можно исследовать оценки любых параметров поляризации: азимута, эллиптичности и других. Результаты данного исследования могут быть использованы для оптимизации алгоритмов обработки сигналов и повышения эффективности работы оптико-электронных приборов и систем широкого профиля.

**Ключевые слова:** поляризационные измерения, эффективные оценки, параметры Стокса, степень поляризации, дисперсионные границы.

## 1. Введение

Применение поляризационных устройств в лазерной технике, в оптических приборах и системах делает актуальной задачу прецизионного измерения характеристик поляризации излучения. Существуют разные способы измерений состояния поляризации [1]. Изобретено множество устройств их реализующих. В [2-3] рассмотрены метрологические особенности планирования поляризационных измерений в условиях аддитивного шума. В данной работе делается обобщение полученных результатов на случай аддитивно-мультипликативного нормального шума. Состояние поляризации квазимонохроматической волны можно задавать разными способами. Во многих случаях удобно использовать параметры Стокса, которые имеют одинаковую размерность, являются действительными величинами, и имеют наглядную интерпретацию координат точки на сфере Пуанкаре [1]. Параметры Стокса используются также в кристаллографии и квантовой физике.

## 2. Основные соотношения

Анализ поляризационных измерений целесообразно провести, используя схему регистрации с поляризатором и фазовым компенсатором, в которой можно сканировать угол поворота поляризатора  $\theta$  и фазовую задержку  $\epsilon$ , вносимую компенсатором.

На вход поступает анализируемое излучение, на выходе измеряется интенсивность прошедшей волны. Параметрической моделью задачи является функциональная зависимость выходной величины от факторов  $\theta, \varepsilon$  и искомых параметров Стокса входного излучения. Такая модель приведена в [2] и имеет вид

$$I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s}) = \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{2} \cos(2\theta) + \frac{s_2}{2} \sin(2\theta) \cos(\varepsilon) + \frac{s_3}{2} \sin(2\theta) \sin(\varepsilon) \quad (1)$$

Формула (1) задает 2-факторную 4-параметрическую модель. Факторы:  $\theta$  – угол поворота анализатора,  $\varepsilon$  – сдвиг фаз, задаваемый компенсатором. Параметрами модели являются параметры Стокса, обозначенные вектором  $\mathbf{s}=(s_0, s_1, s_2, s_3)$ .

Наглядная интерпретация параметров Стокса полностью поляризованного излучения связана с использованием сферы Пуанкаре [1]. Для частично поляризованного излучения сферу Пуанкаре можно условно представить в виде, показанном на рис.1.

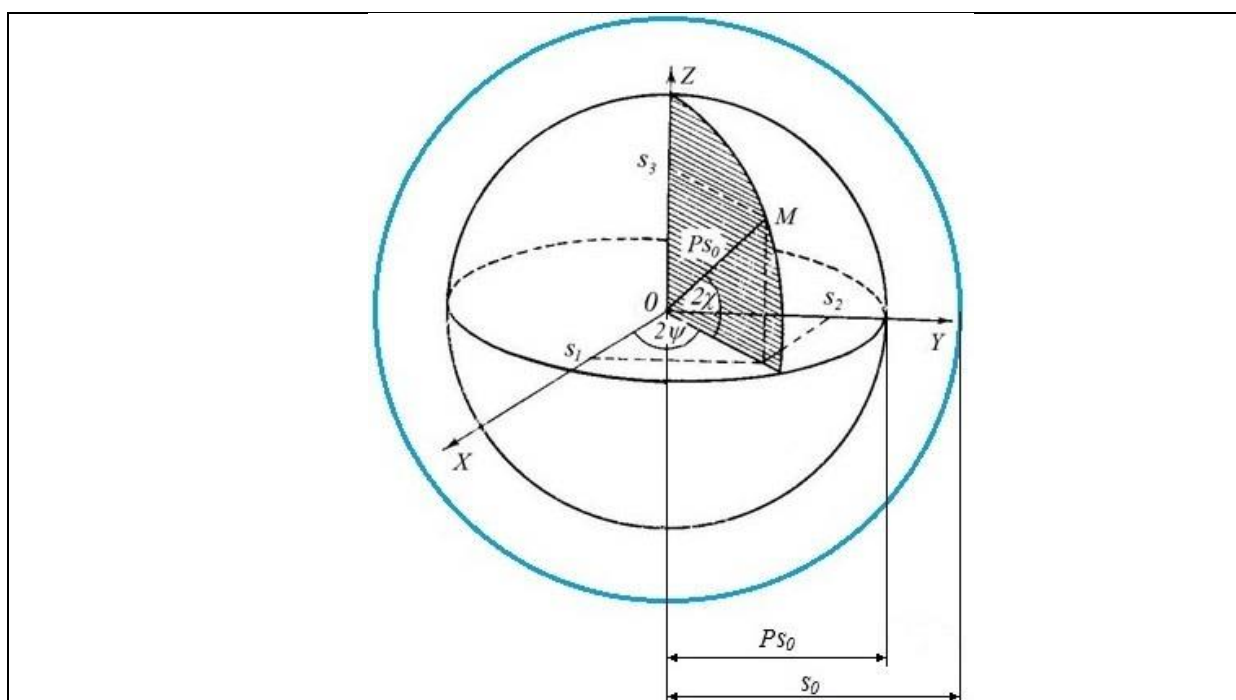


Рис. 1. Сфера Пуанкаре для частично поляризованного излучения.  $P$  – степень поляризации;  $\mathbf{s}=(s_0, s_1, s_2, s_3)$  – вектор параметров Стокса.

Положение точки  $M$  характеризует состояние поляризации поляризованной компоненты. Угол  $2\psi$  – угловая широта, а  $2\chi$  – угловая долгота точки  $M$ . С точки зрения формы и ориентации эллипса поляризации угол  $\psi$  это угол наклона большой оси эллипса к оси абсцисс, а  $\tan(\chi)$  равен отношению малой и большой оси. Таким образом, состояния с линейной поляризацией расположены на экваторе, а состояния с правой и левой круговой поляризацией – на северном и южном полюсах сферы Пуанкаре. Из рис.1 можно видеть, что

$$s_1 = s_0 P \cos(2\chi) \cos(2\psi), \quad s_2 = s_0 P \cos(2\chi) \sin(2\psi), \quad s_3 = s_0 P \sin(2\chi). \quad (2)$$

Согласно теореме Рао-Крамера [4] существует нижняя граница для дисперсионной матрицы оценок параметров модели, называемая дисперсионной матричной границей (ДМГ). Она определяет теоретическую предельную точность совместного оценивания параметров, потенциально достижимую при заданной статистике погрешностей измерений, при полном использовании информации, полученной из эксперимента с учетом априорных данных. ДМГ может быть найдена как матрица, обратная информационной матрице  $\mathbf{IM}$ . Как следует из формул, приведенных в [2], при измерениях в произвольных точках с координатами  $(\theta_k, \varepsilon_l)$  ( $k=0,1,\dots,m$ ;  $l=0,1,\dots,n$ ) элементы нормированной информационной матрицы можно представить в виде

$$IM_{ij} = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{D_{k,l}} \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})], \quad (3)$$

где  $D_{k,l}$  характеризует мощность шума. Для аддитивно-мультипликативного шума при выбранной в [2] нормировке  $D_{k,l}$  может быть представлена в виде

$$D_{k,l} = D(\mu, \theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s}) = 1 - \mu + \mu \frac{I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})}{s_0}, \quad (4)$$

где  $\mu$  - степень мультипликативности шума или отношение мощности мультипликативной составляющей шума к общей мощности шума.

Формулы (3,4) позволяют рассчитать информационную матрицу для любого набора точек в плоскости  $(\theta, \varepsilon)$ . Далее будем оценивать нормированные матрицы, приведенные к единичному общему времени измерения  $T$  и единичной интенсивности ( $s_0=1$ ) анализируемого излучения на входе измерителя. При равномерном распределении точек измерения по  $\theta$  и по  $\varepsilon$  так, что  $\theta_k = \pi k / m, k = 0, \dots, m-1; \varepsilon_l = \pi l / n, l = 0, \dots, n-1, (m \geq 3, n \geq 2)$  элементы нормированной информационной матрицы оценок параметров Стокса  $\mathbf{IN}$  можно представить в виде

$$IN_{i,j} = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{1 - \mu + \mu I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})} \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})] \quad (5)$$

В пределе при неограниченном увеличении  $n$  и  $m$  приходим к интегральному выражению

$$IN_{i,j} = \iint_{00}^{\pi\pi} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1 - \mu + \mu I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})} \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})] d\theta d\varepsilon. \quad (6)$$

### 3. Плотность информации

Подынтегральную функцию в (6) можно рассматривать как плотность информации о параметрах Стокса в плоскости  $(\theta, \varepsilon)$

$$ws_{i,j}(\theta, \varepsilon, \mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1 - \mu + \mu I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})} \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})]. \quad (7)$$

Примеры визуализации распределений плотности информации в виде карт с топографической шкалой цветов показаны на рисунке 2. Значения  $ws$  нормированы на сумму минимального и максимального значения  $ws$  для данной карты, интенсивность на входе измерительной системы приведена к единичной ( $s_0=0$ ). Шкала цветов показана на рисунке 3.

На рисунке 4 показаны серии карт плотностей информации о параметрах Стокса для ряда значений коэффициента мультипликативности шума  $\mu$ . Формат осей соответствует формату осей на рисунке 2.

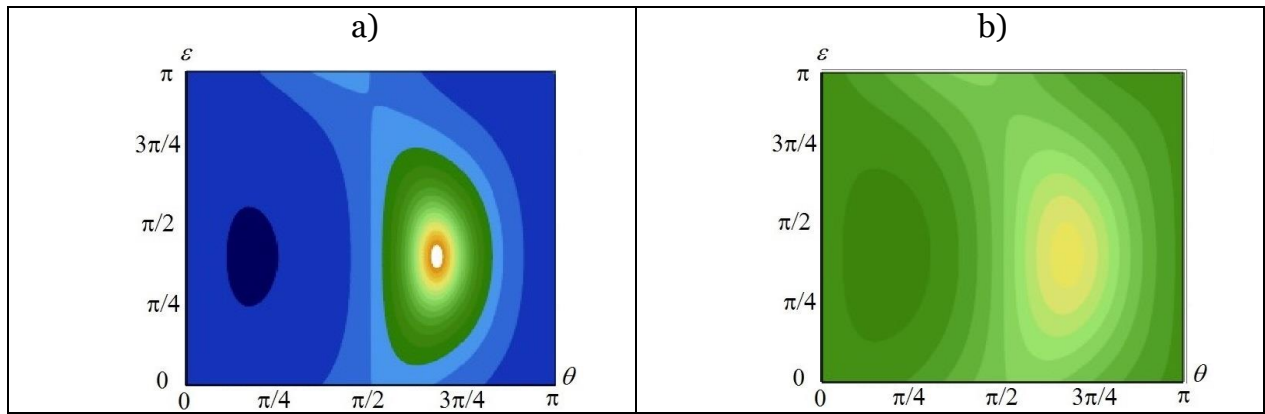


Рис. 2. Плотность информации  $ws_{0,0}(\theta, \epsilon)$ . Равномерный план при  $\mu=0.7$ ;  $2\psi=\pi/6$ ;  $2\chi=\pi/3$ : а)  $P=1$ ; б)  $P=0.5$ .

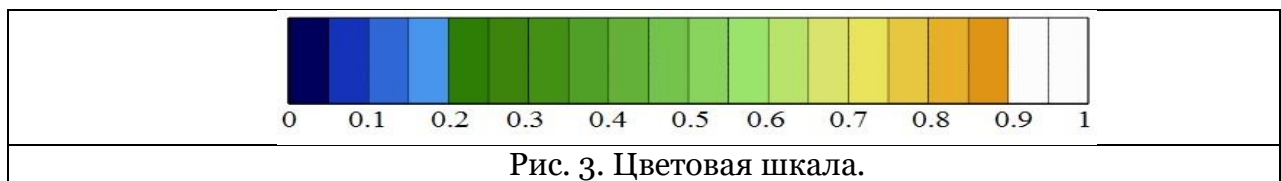


Рис. 3. Цветовая шкала.

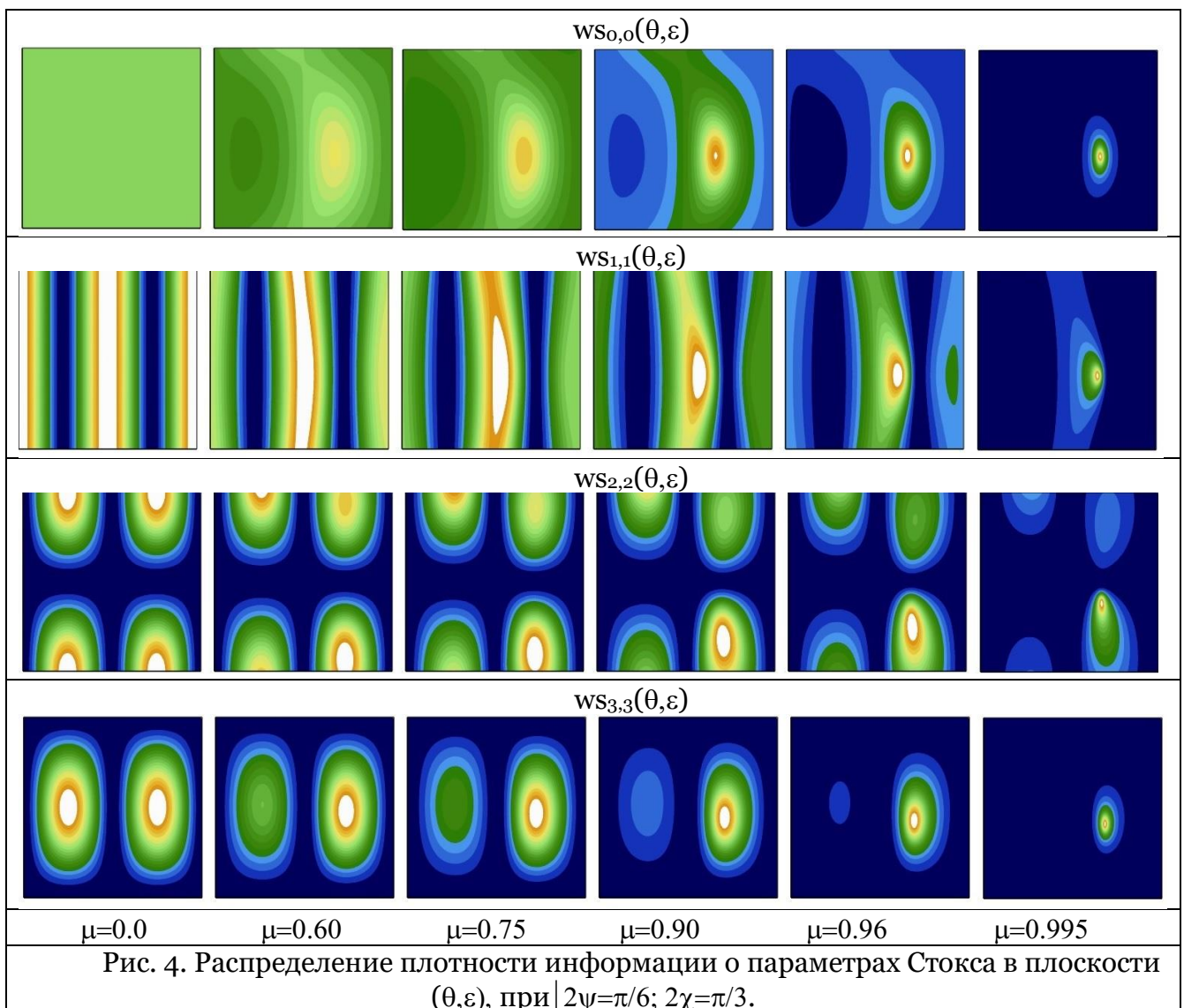


Рис. 4. Распределение плотности информации о параметрах Стокса в плоскости  $(\theta, \epsilon)$ , при  $2\psi=\pi/6$ ;  $2\chi=\pi/3$ .

Анализ распределений (рис.4) позволяет найти наиболее выгодные в метрологическом отношении планы измерений, то есть определить координаты и число точек измерений в плоскости  $(\theta, \varepsilon)$ , которые обеспечат максимальную точность оценок параметров Стокса при заданных параметрах шума. Таким образом, например, в [3] для аддитивного шума было дано обоснование 6-ти точечному оптимальному плану, представленному ниже в табл.1.

#### 4. Визуализация дисперсионных границ

Нормированная дисперсионная матричная граница оценок параметров Стокса определяется как матрица, обратная нормированной информационной матрице  $\mathbf{IN}$  (5):

$$\mathbf{DN} = (\mathbf{IN})^{-1} \quad (8)$$

Любой параметр поляризации может быть выражен как некоторая функция параметров Стокса

$$p = p(s_0, s_1, s_2, s_3) = p(\mathbf{s}) \quad (9)$$

Для нормированной минимальной дисперсии оценки параметра  $p$  из (8) и (9) следует

$$DNp(\mathbf{s}) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 \left( \frac{\partial p(\mathbf{s})}{\partial s_k} \right) \left( \frac{\partial p(\mathbf{s})}{\partial s_l} \right) DN_{k,l} \quad (10)$$

В данной работе анализируются дисперсионные границы оценки степени поляризации  $P$  – параметра частично поляризованного излучения, который выражается через параметры Стокса следующим образом:

$$P = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0} \quad (11)$$

С учетом (2), используя соотношения (5,8-11) можно получить наглядные картины дисперсионных границ распределений оценок степени поляризации на сфере Пуанкаре в декартовых прямоугольных координатах, где по оси абсцисс откладывается широта  $2\psi$ , а по оси ординат – долгота  $2\chi$ . При таком представлении сферическая поверхность трансформируется в прямоугольник на плоскости, меридианы превращаются в параллельные вертикальные линии, а параллели растягиваются тем сильнее, чем ближе они к полюсам. Полюсные точки превращаются в горизонтальные линии. На рис.5а и рис.5б дан пример такой визуализации дисперсионных границ оценки степени поляризации  $DNP(2\psi, 2\chi)$  с использованием формул (2,5) при 6-ти точечном равномерном плане ( $m=3, n=2$ ) и одинаковой степени мультипликативности шума. Отличие состоит только в степени поляризации: а)  $P=1$ ; б)  $P=0.5$ .

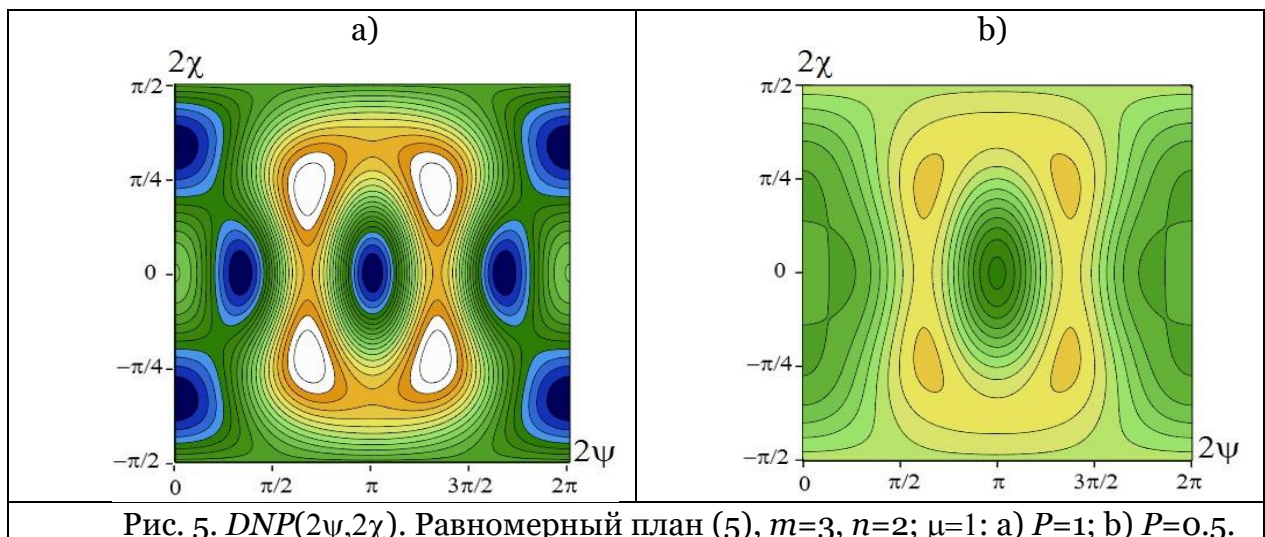
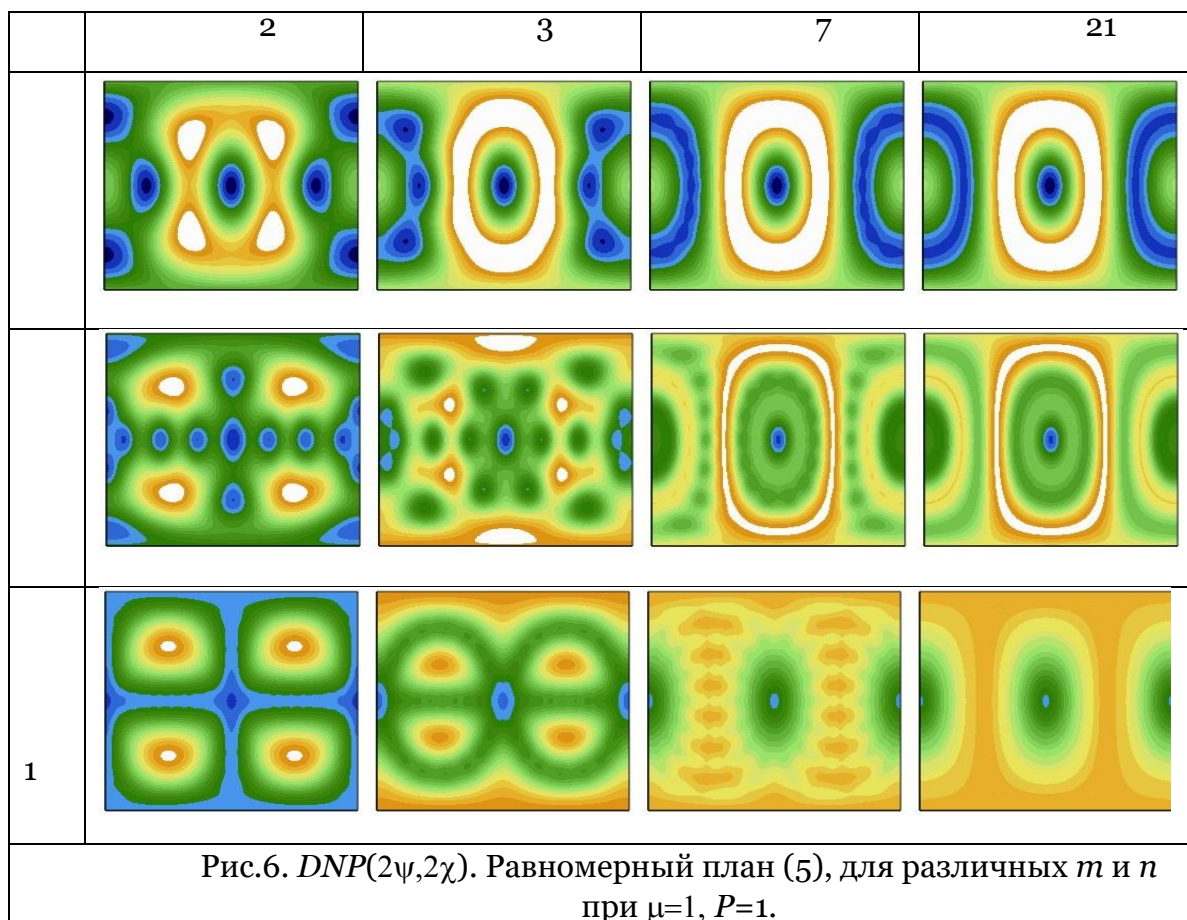


Рис. 5.  $DNP(2\psi, 2\chi)$ . Равномерный план (5),  $m=3, n=2$ ;  $\mu=1$ : а)  $P=1$ ; б)  $P=0.5$ .

Из карт дисперсионных границ, показанных на рис.6, можно видеть характер изменения  $DNP(2\psi, 2\chi)$  для различных комбинаций  $m$  и  $n$  при фиксированном коэффициенте мультипликативности шума  $\mu=1$ .



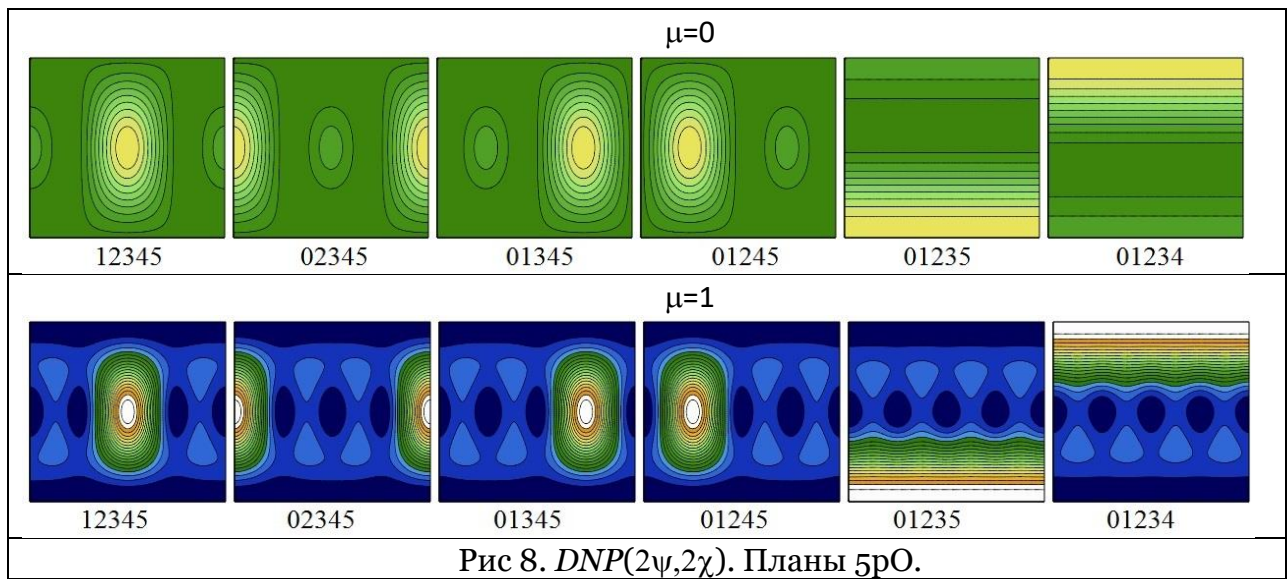
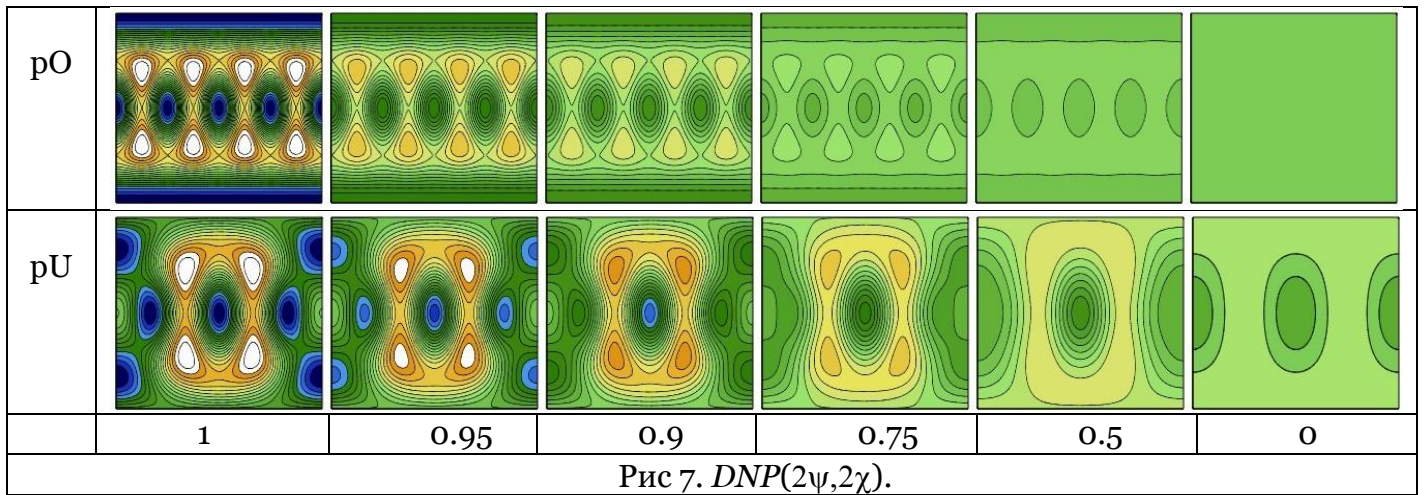
В [2-3] на основании анализа распределений плотности информации (см. рис.4) показано, что при аддитивном шуме ( $\mu=0$ ) оптимальным по критерию минимума определителя нормированной дисперсионной матрицы является 6-ти точечный план, который может быть представлен в виде таблицы 1. Именно такой план эвристически предложен в монографии [1] без анализа погрешностей.

Таблица 1. Оптимальный план 6рО

№	0	1	2	3	4	5
$\theta$	0	$\pi/2$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$
$\varepsilon$	0	0	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$

Рассмотрим распределения дисперсионных границ оценок  $P$  по сфере Пуанкаре для 6-ти точечного оптимального плана 6рО (Таб.1), а также для его 5-ти точечных 5рО и 4-х точечных 4рО укороченных вариантов, в условиях аддитивно-мультипликативного нормального шума. Результаты визуализации  $DNP(2\psi, 2\chi)$  показаны на рисунках 6-8 с использованием топографической шкалы цветов (рис.2) с прежней нормировкой.

На рис.7 показаны серии карт  $DNP(2\psi, 2\chi)$  для плана 6рО при различных  $\mu$ . В этой же таблице для сравнения показаны во второй строке под шифром 6рU аналогичные серии распределений для равномерного плана (5), при  $m=3, n=2$ .



На рис. 8 представлены картины распределений  $DNP(2\psi, 2\chi)$  при  $\mu=0$  и  $\mu=1$  для всех 6-ти возможных 5-ти точечных планов, полученных удалением одного измерения из табл. 1. Пятизначный код здесь соответствует номерам точек измерений.

На примере представленных рисунков можно проследить влияние различных точек оптимального плана на характер трансформации картин распределений. Так замена 4 на 5 приводит к обращению картин относительно экватора сферы Пуанкаре; 2 на 3 – к обращению относительно центрального меридиана; 0 на 1 – к сдвигу вдоль экватора на  $\pi$ .

На рис. 9 представлены картины распределений  $DNP(2\psi, 2\chi)$  при  $\mu=0$  и  $\mu=1$  для всех 12-ти возможных 4-х точечных планов, полученных удалением двух измерений из табл. 1. Четырехзначный код здесь соответствует номерам точек измерений.

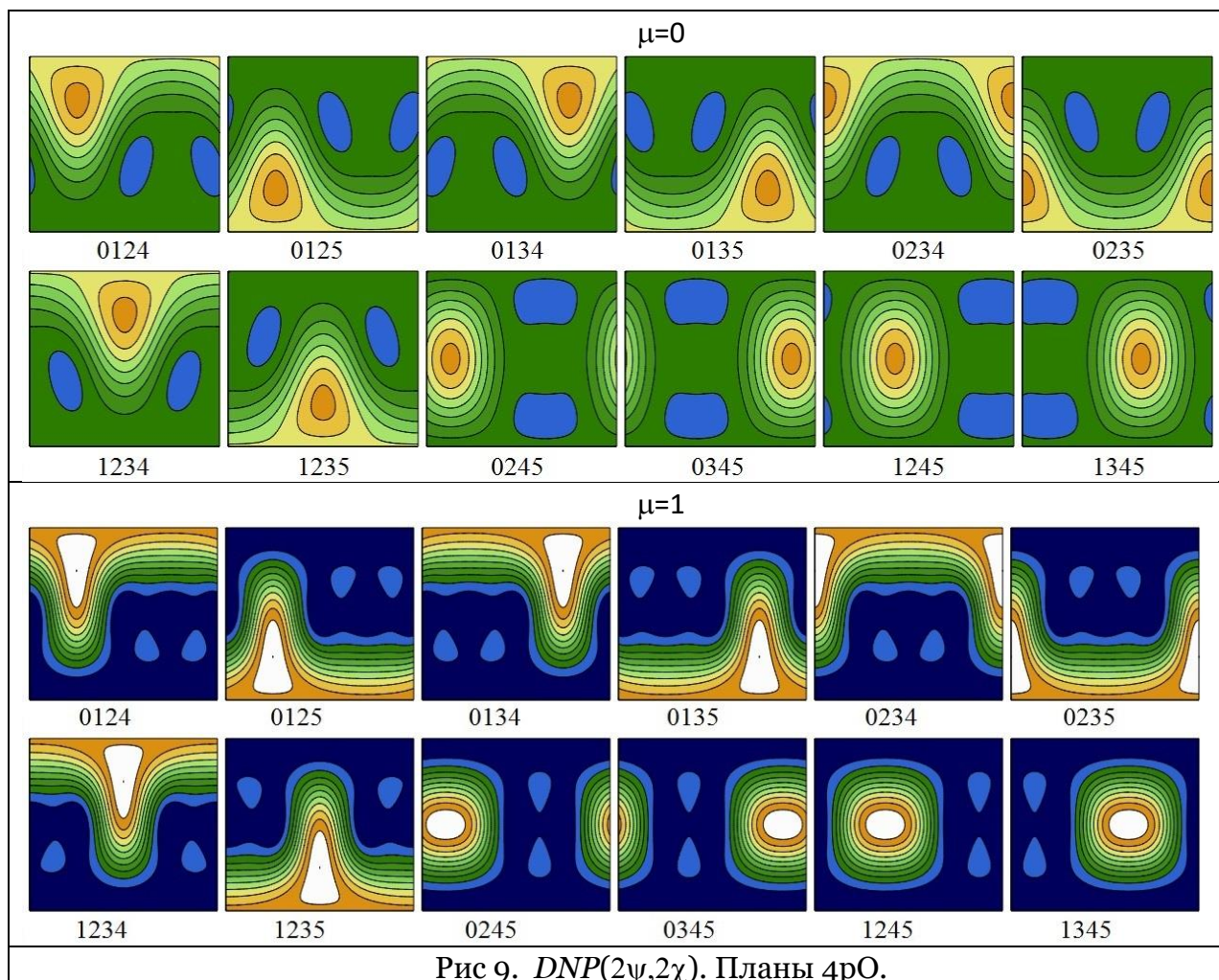


Рис 9.  $DNP(2\psi, 2\chi)$ . Планы 4рО.

На практике, наряду с оптимальным 6-ти точечным планом, часто используются 4-х точечные планы 4рО и план, который можно выразить формулой  $3рО+so$  [5]. Последний состоит из трех измерений в точках с координатами из таблицы 1 и одного измерения полной интенсивности излучения  $so$ .

На рис. 10 представлены картины распределений  $DNP(2\psi, 2\chi)$  при  $\mu=0$  и  $\mu=1$  для всех 8-ми возможных 4-х точечных планов  $3рО+so$ . Трехзначный код здесь соответствует номерам точек измерений из табл. 1.

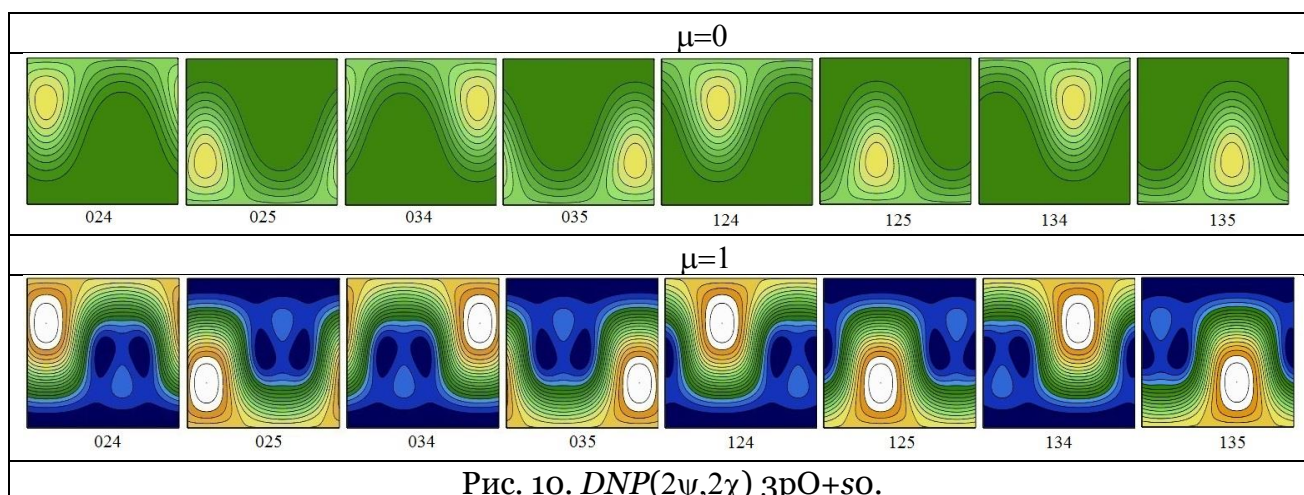


Рис. 10.  $DNP(2\psi, 2\chi)$  3рО+so.



Из рисунков видно, что области с потенциально минимальными погрешностями измерений меняют свое положение на сфере Пуанкаре в зависимости от кода. При наличии априорной информации это позволяет оптимизировать выбор точек для проведения измерений.

## 5. Диапазоны значений $|\mathbf{DN}|$ и $DNP$

Диапазоны изменения значений  $|\mathbf{DN}|$  и  $DNP$  для рассмотренных выше планов представлены в таблице 2 при  $P=1$  и разных значениях  $\mu$ . Шифр 6pU использован для обозначения 6-ти точечного равномерного плана (5) при  $m=3, n=2$  (см. рис. 5а). Таблица 3 на примере плана 4pO показывает, как меняются границы диапазонов  $|\mathbf{DN}|$  и  $DNP$  для различных значений степени поляризации  $P$ .

$\mu$	$ \mathbf{DN} $			$DNP$		
	0	0.75	1	0	0.75	1
6pU	$8.192 \cdot 10^3$	675 - 1167	0 - 336	12 - 20	3.0 - 10.7	0 - 7.9
6pO	$6.912 \cdot 10^3$	675 - 719	0 - 128	16	5.2 - 7.0	0 - 4.0
5pO	$1.000 \cdot 10^4$	610 - 2444	0 - $1.3 \cdot 10^3$	13 - 40	4.4 - 32.5	0 - 30
4pO	$1.638 \cdot 10^4$	829 - 5071	0 - $3.0 \cdot 10^3$	11 - 63	3.6 - 43.4	0 - 37
3pO+so	$1.638 \cdot 10^4$	1117 - 9761	0 - $8.0 \cdot 10^3$	16 - 46	4.0 - 43.0	0 - 42

$\mu$	$P$	$ \mathbf{DN} $			$DNP$		
		0	0.75	1	0	0.75	1
0		$1.638 \cdot 10^4$	$1.638 \cdot 10^4$	$1.638 \cdot 10^4$	11 - 63	8.7 - 45	8 - 32
0.75		829 - 5071	1525 - 3675	1066 - 1066	3.6 - 43.4	4.6 - 31	5 - 20
1		0 - 2984	428 - 1876	1924 - 1024	0 - 37	3 - 25	4 - 16

Полученные результаты на частных примерах были проверены методом численного статистического эксперимента, в котором шумы моделировались генератором случайных чисел с нормальным аддитивно-мультипликативным шумом [6].

## 6. Заключение

В заключение отметим, что с помощью разработанной методики, основанной на параметрической теории информации, можно исследовать оценки любых параметров поляризации: азимута, эллиптичности и других. Результаты данного исследования могут быть использованы для оптимизации алгоритмов обработки сигналов и повышения эффективности работы оптико-электронных приборов и систем широкого профиля: от лазерных доплеровских измерителей скорости потоков [7] и квантово-оптических систем наведения [8,9] до астрономических систем 3D интерферометрии [10,11].

## Список литературы

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
2. Смирнов В.И. Эффективные оценки параметров Стокса частично поляризованного излучения в условиях нормального аддитивного шума. Измерительная техника. №10. 2018. С. 35-40.
3. Смирнов В.И. Анализ погрешностей измерения параметров поляризации квазимонохроматического излучения на основе теории информации // Оптические методы исследования потоков: XIV Межд. науч-технич. конференция [Электронный ре-

- сурс]: труды конференции. – Электрон. дан. – М.: НИУ «МЭИ», 2017. С.346-363. ISBN 978-5-906972-44-6.
4. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика. 1979.
  5. Ищенко Е.Ф., Соколов А.Л. Поляризационный анализ. М.: Издательство «Знак». 1998.
  6. Смирнов В.И., Янина Г.М. Анализ потенциальной точности измерения параметров поляризации частично поляризованного излучения на основе теории информации. // Оптические методы исследования потоков: XV Межд. науч-технич. конференция [Электронный ресурс]: труды конференции. – Электрон. дан. – М.: НИУ «МЭИ», 2019. С.283-. ISBN .
  7. Ринкевичюс Б.С. Лазерная доплеровская анемометрия. - М.: Кнорус. 2017.
  8. А.С. Акентьев, А.Л. Соколов, М.А. Садовников, Г.В. Симонов. Поляризационный анализ системы наведения квантово-оптических систем // *Оптика и спектроскопия* Т. 122, № 6, г. Москва, 2017 с. 1044-1050.
  9. A.L. Sokolov. Optical vortices with axisymmetric polarization structure," *Optical Engineering* № 56(1), 31 January, 2017.
  10. Ахметов И. И., Фролов П. Н., Ринкевичюс Б. С., Киселёв А. В., Тавров А. В. Ахроматический 3D интерферометр для контроля и анализа качества волнового фронта // *ИТ.* № 8. 2013. С. 28-30.
  11. Фролов П. Н., Ананьева В. И., Ксанфомалити Л. В., Тавров А. В. Наблюдение фазовых кривых экзопланет с помощью звездного коронографа. *Астрономический вестник.* Т. 49. № 6. 2015. С. 448.

# Visualization of the variance boundaries for the polarization parameters of light on the Poincare sphere

V.I. Smirnov

National Research University "MPEI"

ORCID: 0000-0002-3047-988X, [smirnovvi-mpei@yandex.ru](mailto:smirnovvi-mpei@yandex.ru)

## **Abstract**

The methods of parametric information theory are used to study the minimal variance boundaries of polarization parameters estimates of partially polarized quasi-monochromatic radiation in a polarimetric scheme with an analyzer and a phase compensator under conditions of additive-multiplicative normal noise. The density distributions of information on the Stokes parameters in the coordinates of the angle of rotation of the analyzer and the phase shift of the compensator are shown. The analysis of these distributions allows finding the most favorable measurement plans in metrological relation. Matrix variance boundaries of different polarization parameters for the uniform plan and other measurement plans are calculated. The error limits of the estimates of the degree of polarization are calculated. The results of the analysis are confirmed by numerical simulation. The patterns of the distributions of the variance bound estimates of the degree of polarization on the Poincare sphere are given. With the help of the developed technique based on the parametric information theory, it is possible to study estimates of any polarization parameters: azimuth, ellipticity and others. The results of this study can be used to optimize signal processing algorithms and improve the efficiency of optoelectronic devices and systems of a wide profile.

**Keywords:** polarized measurements, effective estimation, Stokes parameters, degree of polarization, variance boundary visualization.

## **References**

1. Born M., Wolf E. Principles of optics. M: Nauka, 1973.
2. Smirnov V.I. Effective Estimates of the Stokes Parameters of Partially Polarized Radiation in Conditions of Normal Additive Noise. Measurement Techniques: January 2019, Volume 61, Issue 10, Page 1001-1009.
3. Smirnov V. I. Analysis of errors in measuring the polarization parameters of quasi-monochromatic radiation on the basis of information theory \\ Optical methods for studying flows: XIV Inter. science and technology. conference [Electronic resource]: proceedings of the conference. – Electron. dat. – M.: national research UNIVERSITY "MPEI", 2017. Pp. 346-363. ISBN 978-5-906972-44-6.
4. Bard Y. Nonlinear parameter estimation. M: Statistica, 1974.
5. Ishchenko E. F., Sokolov A. L., Polarization analysis. M.: Publishing House "Znak". 1998.
6. Smirnov V. I., Yanina G. M. Analysis of potential accuracy of measurement of polarization parameters of partially polarized radiation on the basis of information theory. \\ Optical methods for studying flows: XV Int. science and technology. conference [Electronic resource]: proceedings of the conference. – Electron. dat. – M.: national research UNIVERSITY "MPEI", 2019. P. 283-. ISBN.
7. Rinkevichius B. S., Laser Doppler anemometry. - M.: KnoRus. 2017.
8. A. S. Akentyev, A. L. Sokolov, M. A. Sadovnikov, G. V. Simonov. Polarization analysis of the guidance system of quantum optical systems // Optics and spectroscopy Vol. 122, № 6, Moscow, 2017 p. 1044-1050
9. A.L. Sokolov. Optical vortices with axisymmetric polarization structure," *Optical Engineering* № 56(1), 31 January, 2017.

10. Ahmetov I. I., Frolov P. N., Rinkevichius B. S., Kiselev A. V., Tavrov A. V. Achromatic interferometer for 3D monitoring and analysis of quality of wave front // Meas.Tech.: No. 8. 2013. P.28-30.
11. Frolov P. N., Anan'eva, V. I., and Ksanfomaliti, L. V., Tavrov A. V. Observation of phase curves of exoplanets using stellar coronagraph. Astronomical Bulletin. Vol. 49. No. 6. 2015. P. 448.