

Метод оценки результатов топологической оптимизации, основанный на анализе растровых изображений распределения материала

П.А. Алехин¹, А.О. Глебов², С.В. Карпов³, С.В. Карпушкин⁴

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

¹ ORCID: 0000-0002-0823-8369, pavel.aleh@yandex.ru

² ORCID: 0000-0003-4214-6422, glebov.alex@inbox.ru

³ ORCID: 0000-0001-8238-1537, karpov.sv@mail.tstu.ru

⁴ ORCID: 0000-0001-6886-0646, karp@mail.gaps.tstu.ru

Аннотация

Топологическая оптимизация получила широкое распространение при решении задач моделирования напряжённо-деформированного состояния, процессов теплопроводности, электромагнетизма и др. Как правило, задачи решаются SIMP-методом с применением систем конечно-элементного анализа. Эффективность применения SIMP-метода зависит от шага дискретизации расчётной области на конечные элементы, первоначального распределения материала и процедур фильтрации получаемых результатов. В известных работах по топологической оптимизации оценка получаемых результатов основывается лишь на визуальном анализе полученных результатов распределения материала. В данной работе предложен метод оценки результатов, основанный на анализе растровых изображений полей распределения материала. Метод предусматривает расчёт доли пикселей, характеризующих наличие материала и принадлежащих переходной области, от общего количества пикселей расчётной области. Метод является универсальным, не зависящим от вида основных расчётных уравнений, и может быть использован для качественного и количественного сопоставления результатов решения двумерных задач топологической оптимизации.

На примере задачи стационарной теплопроводности плоской металлической пластины исследовано влияние плотности расчётной сетки конечных элементов на качество результатов топологической оптимизации методом подвижных асимптот и продолжительность расчетов, найдено и обосновано оптимальное значение плотности.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, анализ изображений, SIMP-метод, метод конечных элементов, древовидная структура.

1. Введение

Топологическая оптимизация (ТО) – сравнительно новое направление математических методов поиска оптимальных конструкции технических систем. За последние 15 лет опубликовано большое количество работ, посвящённых применению методологии ТО для решения широкого спектра научно-технических задач. Например, работа [1] посвящена применению ТО для проектирования стальных перфорированных двутавровых металлических профилей. Постановка задачи ТО в этом случае позволила более глубоко понять механизмы напряжённо-деформированного состояния металлических балок при приложении нагрузок на изгиб и срез. В работе [2] рассмотрено применение ТО для создания радиаторов охлаждения. В качестве основных расчётных соотношений использованы уравнения Навье-Стокса при допущении о стационарном ламинарном течении несжимаемой среды. По мнению авторов, ТО является целесообразным

подходом к решению задач моделирования тепловых процессов естественной конвекции. Авторы [3] исследовали ТО электромагнитных систем на примере бесщёточного электродвигателя постоянного тока.

Целью ТО является определение наилучшего распределения материала в области с фиксированными геометрическими размерами при заданных нагрузках и удовлетворении ограничений. Как правило, для решения системы уравнений математической модели используется метод конечных элементов (МКЭ). Решением задачи ТО является распределение условной плотности материала в расчётной области. В качестве критериев оптимальности в прочностных задачах могут выступать минимум потенциальной энергии деформации, минимум объёма изделия, а в качестве ограничений – допустимые диапазоны значений перемещений, прочностных характеристик и др.

В каждой точке расчётной системы возможно одно из квазидискретных состояний: в ней либо содержится конструкционный материал, либо нет. Такая дискретность может привести к ухудшению сходимости алгоритма оптимизации, поэтому используется понятие промежуточной плотности. Наиболее распространённым является SIMP-метод (Solid Isotropic Material with Penalty), разработанный в конце восьмидесятых годов прошлого столетия [4].

Эффективность и точность ТО сильно зависит от первоначального распределения материала, выбранной сетки конечных элементов и процедур фильтрации получаемых результатов [5]. SIMP-метод получил широкое распространение благодаря простоте применения, вычислительной эффективности и относительно простой интеграции в существующие алгоритмы КЭ-анализа [6].

Часто оценка результатов ТО основывается лишь на визуальном анализе полученных результатов распределения материала. Авторы [5] приходят к выводу о некорректности подобного подхода: на конкретном примере показано, что алгоритм ТО быстро находит «относительно хорошее» решение, а далее требуется большое количество итераций для его незначительного улучшения с точки зрения целевой функции, но распределение материала изменяется существенно. Результаты ТО при анализе напряжённо-деформированного состояния, полученные на 100-ой итерации и на финальной 1562-ой, визуально очень схожи, значения целевой функции – 1.46 и 1.54 соответственно, т.е. финальный вариант лучше полученного на 100-ой итерации всего на 5.5%, но распределения плотности материала в этих вариантах значительно различаются. В связи с этим авторы приходят к выводу, что анализировать решения задач ТО следует не только качественно, но и количественно.

Результаты решения задач ТО чаще всего представляют в виде растрового изображения бинарной картины распределения материала внутри расчётной области: значению «1» соответствует наличие материала, значению «0» – его отсутствие, значениям внутри интервала (0,1) – области с промежуточной плотностью. В практике численного решения задач ТО принято считать, что области со значением плотности [0;0.4] соответствуют отсутствию материала, области в диапазоне [0.4;0.6] являются переходными, а области [0.6;1] соответствуют наличию материала. Для оценки решения задачи ТО интерес представляют две последние области. Будем называть данную шкалу представления данных «топологической».

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что задача разработки эффективного метода количественного и качественного анализа оценки результатов ТО является актуальной. Основными требованиями к этому методу являются простота реализации и универсальность (применимость для решения широкого спектра задач).

2. Методология

Основой для разработки метода оценки результатов ТО является анализ растровых изображений результатов решения задач. Изображения часто представляются с помощью аддитивной цветовой модели RGB, которая ставит в соответствие каждому пиксе-

лу значение интенсивности красного r , зелёного g и голубого b цвета в виде $[r,g,b]$. Данную шкалу будем называть растровой.

В этой шкале чёрный цвет имеет значение $[0,0,0]$, белый – $[255,255,255]$. В связи с этим интересующие нас области $[0.4;0.6]$ и $[0.6;1]$ по топологической шкале будут иметь цветовую интенсивность $[102,153]$ и $[153,255]$ соответственно.

Идея метода количественной оценки состоит в следующем. Необходимо представить результаты ТО в виде растровой графики, например, в распространённом формате JPG. Изображения должны быть идентичными, т.е. иметь одинаковый физический размер и разрешение. Далее осуществляется расчёт количества пикселей, которые соответствуют областям $[0.4;1]$ и $[0.6;1]$ по топологической шкале. Для этого вводится значение допуска $\pm tol$: если контрольный чёрный пиксел имеет цветовую интенсивность $[r,g,b]$, то в выделение попадут пиксели, имеющую цветовую интенсивность $[r \pm tol, g \pm tol, b \pm tol]$. Поэтому доля материала по топологической шкале $[0.4;1]$ ($mat1$) и $[0.6;1]$ ($mat2$) составит соответственно:

$$mat1 = \frac{px51}{PX} * 100\%$$
$$mat2 = \frac{px77}{PX} * 100\%$$

где PX – общее число пикселей растрового изображения,

$px77$ и $px51$ – число выделенных пикселей с допуском 77 и 51 соответственно.

Оценку качественного сравнения результатов ТО построим на свойстве аддитивности цветовой модели RGB. Идея состоит в наложении одного растрового изображения на другое и вычитании значения цветовой интенсивности второго изображения из соответствующих значений первого изображения. Получаемое в итоге результирующее изображение будет иметь цветовую интенсивность $[|r_1 - r_2|, |g_1 - g_2|, |b_1 - b_2|]$.

Таким образом, одинаковые области на двух изображениях будут иметь чёрный цвет, различающиеся по интенсивности – серый, значительно отличающиеся (например, «0» и «1») – белый. По количеству и геометрии белых областей на наложенных друг на друга изображениях можно судить о качественных различиях решений задачи ТО. Для количественного анализа достаточно рассчитать количество белых пикселей с известным значением допуска интенсивности (77 или 51).

Отметим, что в некоторых работах расчётная плотность, относящаяся к отсутствию материала, принималась в диапазоне $[0;0.1]$ по топологической шкале [7,8]. В предлагаемом методе оценки это повлияет лишь на значение допуска tol .

3. Экспериментальная часть

Рассмотрим задачу, аналогичную рассмотренной в работах [9,10] – двумерную задачу ТО стационарной теплопроводности пластины. Расчётная квадратная область Ω с длиной стороны 0.5 м представлена на Рис 1. Внутри расчётной области присутствует источник тепла мощностью $Q = 10^4$ Вт/м³. Для моделирования стока тепла на центральной части левой границы Γ_D (граница Дирихле) задано граничное условие первого рода – постоянная температура $T_{cool} = 0^\circ\text{C}$. Длина этого участка составила 0.05 м. На других границах Γ_N (границы Неймана) теплообмен отсутствует (адиабатические стенки). В качестве материала использована сталь конструкционная легированная 40ХН2МА, имеющая теплопроводность 45 Вт/м*К.

В качестве основного расчётного уравнения использовано уравнение теплопроводности Фурье-Кирхгофа, в качестве целевых функций – масса материала и средняя температура пластины. Задача заключается в минимизации суммы целевых функций при допущении об их равной значимости. При этом масса пластины не должна быть меньше 30% и больше 100% первоначальной.

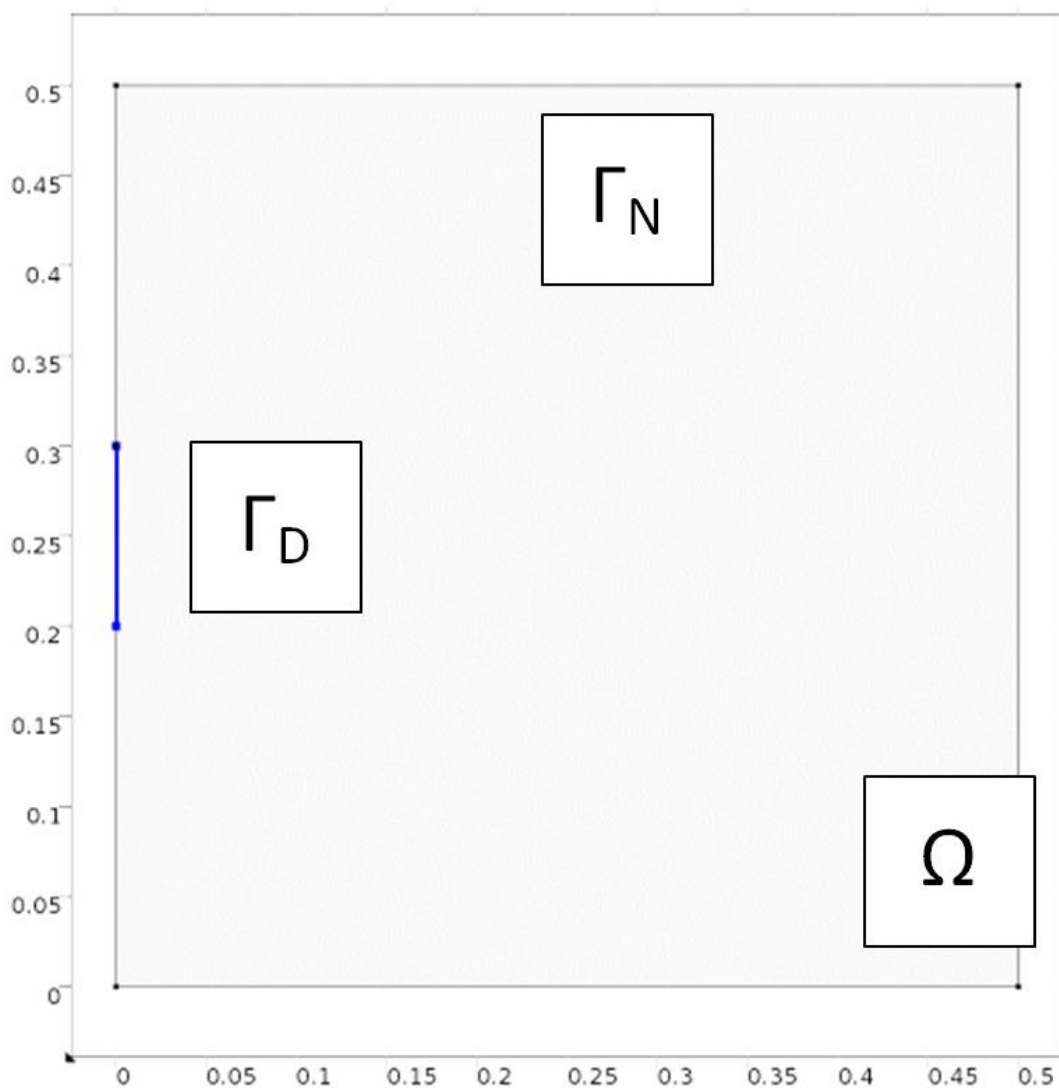





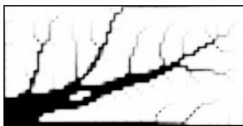
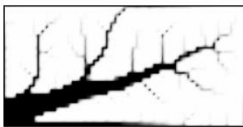


Рис 1. Расчётная область задачи ТО стационарной теплопроводности.

Как видно из рис. 1, расчётная система симметрична относительно центральной горизонтальной оси, поэтому задача решалась для половины системы с применением системы КЭ-анализа. Использовалась регулярная прямоугольная сетка, её плотность задавалась путем фиксации максимального размера единичного элемента δ . Актуальность такого подхода обоснована в работе [11].

Согласно рекомендациям [12], значение параметра штрафа p SIMP-метода выбрано равным 5. Для решения задачи оптимизации выбран метод подвижных асимптот (Method of Moving Asymptotes, MMA) – градиентный оптимизационный решатель, разработанный Кристером Сванбергом [13], [14]. В литературе этот метод получил название GCMMA (глобально сходящийся метод скользящих асимптот). Выбор метода обусловлен его применимостью для решения задач с сотнями и даже тысячами варьируемых переменных при незначительном увеличении объема вычислений.

Расчёты проведены на компьютере с конфигурацией: процессор Intel Core i5-7400, 8 Гб оперативной памяти. Расчёт количества пикселей проведен в растровом редакторе Adobe Photoshop CC. Результаты решения задачи ТО системы, представленной на рис. 1, для δ от 3 до 100 мм сведены в табл. 1.

Табл. 1. Результаты ТО стационарной теплопроводности плоской пластины для разных значений максимального элемента расчётной сетки

№	δ , мм	Время расчёта, ч	Результат ТО	mat1, %	Δ mat1, %	m at2, %	Δ m at2, %
1	3	3,19		20,00	-	19,44	-
2	4	0,87		19,49	2,6	18,87	2,9
3	5	0,37		19,04	4,8	18,43	5,2
4	8	0,07		18,43	7,9	17,64	9,3
5	9	0,05		18,28	8,6	17,55	9,7
6	10	0,034		18,14	9,3	17,33	10,9
7	100	0,0028		14,23	28,9	12,16	37,4

Приведенные в табл. 1 графические результаты говорят о «дендрическом» или предфрактальном распределении материала, которое позволяет минимизировать термическое сопротивление между источником и стоком тепла. Аналогичные результаты были получены в работе [10], что свидетельствует об адекватности используемой математической модели. Таким образом, оптимальная топология для задач стационарной теплопроводности имеет сходство с природной организацией системы проводящих каналов в листовых пластинках, через которые осуществляется транспорт веществ (пальчатое жилкование).

Для $\delta = 2$ мм продолжительность расчёта превысила 48 часов при разнице между mat1 и mat2 менее 3% по сравнению с расчётом для $\delta = 3$ мм. По этой причине расчёт

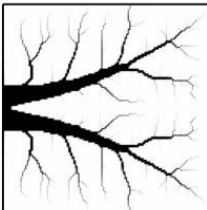

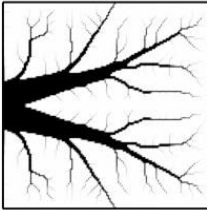

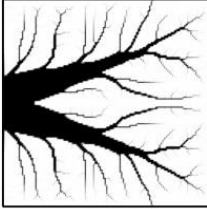

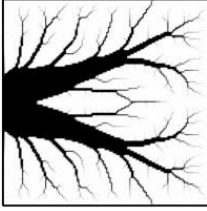

№1 табл. 1 был принят в качестве контрольного, относительно которого были найдены отклонения $\Delta mat1$ и $\Delta mat2$.

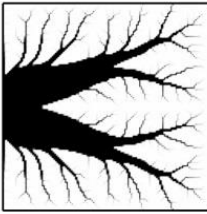

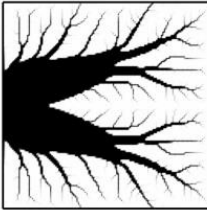

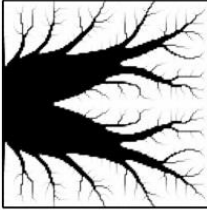
Анализ данных табл. 1 позволяет сделать вывод, что с увеличением плотности расчётной сетки степень детализации изображений увеличивается. Степень дискретизации области, используемая в расчёте №7, является неудовлетворительной: распределение материала не имеет чётко выраженной границы, а абсолютное значение плотности материала значительно (на 28.9 и 37.4% для допусков 51 и 77 соответственно) отличается от контрольного решения №1.

Картины распределения материала в расчётах № 1-3 внешне похожи друг на друга. Это подтверждает и анализ значений параметров $mat1$ и $mat2$: максимальное расхождение составило около 5%. Однако незначительное снижение детализации результатов в расчёте №2 приводит к резкому уменьшению продолжительности расчёта (в 3.7 раза). В связи с этим, плотность КЭ-сетки, соответствующая $\delta = 4$ мм, является оптимальной при решении рассмотренной задачи ТО стационарной теплопроводности.

В табл. 1 приведены результаты решения одной и той же задачи при разных значениях плотности КЭ-сетки. Для оценки качественных изменений в результатах решения задачи ТО была проведена серия расчётов для разных значений тепловыделения Q при найденной оптимальной плотности КЭ-сетки. Результаты сведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты ТО стационарной теплопроводности плоской пластины для разных значений мощности тепловыделения

№	Q , кВт	Результат ТО	Результат наложения
1	5		
2	10		
3	15		
4	20		

5	30		
6	40		
7	50		-

В данной серии расчёт 7 был принят в качестве контрольного: анализ проведен наложением на этот результат ТО остальных изображений. Дополнительно был проведён расчёт доли белых пикселей со значением допуска 77 и 51 (параметры $mat1_{white}$ и $mat2_{white}$ соответственно), результаты которого представлены на рис. 2.

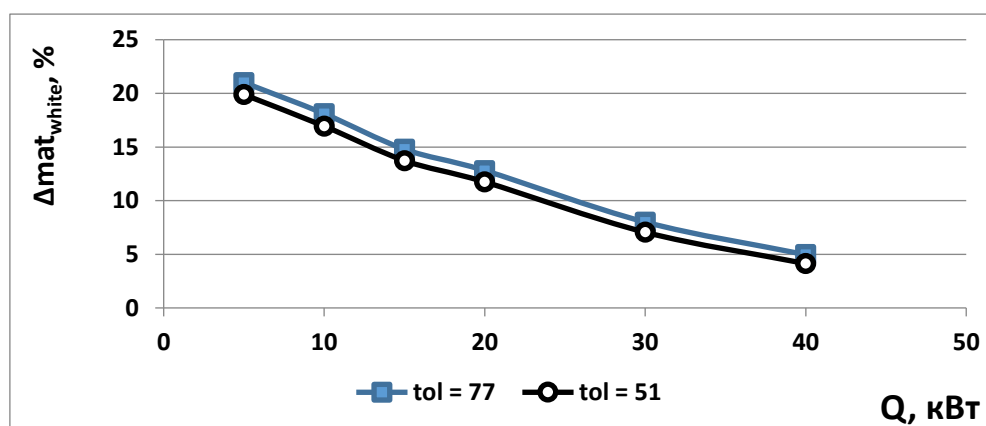


Рис. 2. Зависимость доли белых пикселей от значения внутреннего тепловыделения.

Как видно из табл. 2, изменение мощности внутреннего тепловыделения Q оказывает значительное влияние на распределение материала. Общая дендрическая структура сохраняется, а главные отличия состоят в конфигурации двух центральных областей. Данные результаты можно объяснить тем, что для диссипации большей мощности требуется более развитая система теплопроводящих каналов. Полученные результаты хорошо согласуются с выводами работы [15], где авторы исследовали влияние теплового потока, внутренней мощности и внешней конвекции на решение двумерной задачи ТО стационарной теплопроводности при создании новых теплопроводящих конструкций. Следовательно, решение подобных задач и анализ результатов с применением разработанного метода может найти практическое применение при создании новых конструкций радиаторов пассивного охлаждения. При этом следует обратить особое внимание на соотношение стоимости изготовления изделий сложной геометрии и экономии от снижения материалоемкости и улучшения тепловых режимов функционирования оборудования.

Совместный анализ табл. 2 и рис. 2 позволяет сделать вывод, что с ростом значения Q количество материала в рассматриваемой расчётной области увеличивается по закону, близкому к линейному. Величина достоверности аппроксимации составляет 0,98. Таким образом, использование предлагаемого подхода, основанного на наложении изображений и выделении областей отличий, позволяет проводить оценку не только количественного, но и качественного различия результатов ТО.

По сути, ТО является процедурой перераспределения материала внутри заданной области. Разработанный метод позволяет находить оптимальное значение плотности КЭ-сетки, а также визуализировать отличия между решениями задач в одной и той же расчётной области для разных условий, в том числе сравнить эффективность топологически оптимизированной и исходной конструкций. По сравнению с подходом [16], предложенный метод отличается простотой реализации и высокой точностью решения двумерных задач.

4. Заключение

В данной работе предложен новый метод оценки результатов ТО, который основан на анализе растровых изображений полей распределения материала. Идея метода заключается в расчёте доли пикселей, соответствующих наличию материала и переходной области. Поэтому он является универсальным, не зависящим от вида основных расчётных уравнений, и может быть использован для качественного и количественного сопоставления результатов решения двумерных задач ТО.

На примере задачи стационарной теплопроводности плоской металлической пластины исследовано влияние плотности расчётной сетки на получаемые результаты: найдено и обосновано её оптимальное значение, позволяющее сократить продолжительность решения задачи ТО методом подвижных асимптот без потери точности.

Та же задача решалась для разных значений внутреннего тепловыделения. В этом случае для сравнения результатов из 8-битового цветового кода каждого пикселя изображения-основы вычитался цветовой код другого изображения.

Помимо достоинств, предложенный метод обладает некоторыми недостатками. Он применим только для анализа результатов двумерных задач ТО и требователен к качеству исходных растровых изображений: его точность резко снижается при использовании разрешения, меньшей степени дискретизации расчётной области.

Как отмечено в [17], существует потребность в надёжных и доступных методах, позволяющих осуществить геометрическое отображение результатов ТО для проведения КЭ-анализа. Этому будут посвящены дальнейшие исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части (проект 8.7082.2017/8.9).

Список литературы

1. Tsavdaridis K.D., Kingman J.J., Toropov V. V. Application of structural topology optimisation to perforated steel beams // *Comput. Struct.* Elsevier Ltd, 2015. Vol. 158. P. 108–123.
2. Alexandersen J. et al. Topology optimisation for natural convection problems // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2014. Vol. 76, № 10. P. 699–721.
3. Semyung Wang et al. Topology optimization of electromagnetic systems considering magnetization direction // *IEEE Trans. Magn.* 2005. Vol. 41, № 5. P. 1808–1811.
4. Bendsoe M.P. Optimal shape design as a material distribution problem // *Struct. Optim.* 1989. Vol. 1, № 4. P. 193–202.
5. Sigmund O., Maute K. Topology optimization approaches A comparative review // *Struct. Multidiscip. Optim.* 2013. Vol. 48, № 6. P. 1031–1055.

6. Rozvany G.I.N. A critical review of established methods of structural topology optimization // *Struct. Multidiscip. Optim.* 2009. Vol. 37, № 3. P. 217–237.
7. Neves M.M., Sigmund O., Bendsøe M.P. Topology optimization of periodic microstructures with a penalization of highly localized buckling modes // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2002. Vol. 54, № 6. P. 809–834.
8. Tenek H. L., Hagiwara I. Eigenfrequency Maximization of Plates by Optimization of Topology Using Homogenization and Mathematical Programming // *JSME Int. journal. Ser. C, Dyn. Control. Robot. Des. Manuf.* 1994. Vol. 37, № 4. P. 667–677.
9. Dede E.M. Multiphysics Topology Optimization of Heat Transfer and Fluid Flow Systems // *COMSOL Conference 2009 Boston. Boston, 2009.*
10. Lohan D.J., Dede E.M., Allison J.T. Topology optimization for heat conduction using generative design algorithms // *Struct. Multidiscip. Optim. Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017. Vol. 55, № 3. P. 1063–1077.
11. Haber R.B., Jog C.S., Bendsøe M.P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter // *Struct. Optim.* 1996. Vol. 11, № 1–2. P. 1–12.
12. Bendsøe M.P., Sigmund O. Material interpolation schemes in topology optimization // *Arch. Appl. Mech. (Ingenieur Arch.* 1999. Vol. 69, № 9–10. P. 635–654.
13. Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1987. Vol. 24, № 2. P. 359–373.
14. Svanberg K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations // *Soc. Ind. Appl. Math.* 2002. Vol. 12, № 2. P. 555–573.
15. Iga A. et al. Topology optimization for thermal conductors considering design-dependent effects, including heat conduction and convection // *Int. J. Heat Mass Transf.* Elsevier Ltd, 2009. Vol. 52, № 11–12. P. 2721–2732.
16. Koguchi A., Kikuchi N. A surface reconstruction algorithm for topology optimization // *Eng. Comput.* 2006. Vol. 22, № 1. P. 1–10.
17. Norato J. et al. A geometry projection method for shape optimization // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2004. Vol. 60, № 14. P. 2289–2312.

A Method for Topology Optimization Results Estimation Based on the Analysis of Raster Images of the Material Distribution

P.A. Alekhin¹, A.O. Glebov², S.V. Karpov³, S.V. Karpushkin⁴
Tambov State Technical University

¹ ORCID: 0000-0002-0823-8369, pavel.aleh@yandex.ru

² ORCID: 0000-0003-4214-6422, glebov.alex@inbox.ru

³ ORCID: 0000-0001-8238-1537, karpov.sv@mail.tstu.ru

⁴ ORCID: 0000-0001-6886-0646, karp@mail.gaps.tstu.ru

Abstract

Topology optimization is widespread technique in modeling the stress-strain state, thermal conductivity, electromagnetism, etc. As a rule, tasks are solving with SIMP method using the finite-element analysis. The efficiency of the SIMP method depends on the discretization of the computational domain into finite elements, the initial distribution of the material and the filtration procedures of the results obtained. In the previous papers about topology optimization the estimation of the calculated results is based only on the visual analysis of results material distribution. In this paper, we propose a method for estimation of results based on the analysis of raster images of the material distribution fields. The method involves calculation of ratio of pixels that characterize the presence of material and belong to the transition region by the total number of pixels of the calculation area. The method is universal, independent of the main calculation equations, and can be used for qualitative and quantitative comparison of the results of solving two-dimensional problems of topology optimization.

The influence of density of the calculated finite element mesh on the quality of the results of topology optimization of stationary heat conduction of a flat metal plate investigated. The method of moving asymptotes was chosen as an optimization method. The duration of calculations was examined; the optimal density value of a mesh was found and justified.

Keywords: topology optimization, image analysis, SIMP-method, finite element method, dendritic structure.

References

1. Tsavdaridis K.D., Kingman J.J., Toropov V. V. Application of structural topology optimisation to perforated steel beams // *Comput. Struct.* Elsevier Ltd, 2015. Vol. 158. P. 108–123.
2. Alexandersen J. et al. Topology optimisation for natural convection problems // *Int. J. Numer. Methods Fluids.* 2014. Vol. 76, № 10. P. 699–721.
3. Semyung Wang et al. Topology optimization of electromagnetic systems considering magnetization direction // *IEEE Trans. Magn.* 2005. Vol. 41, № 5. P. 1808–1811.
4. Bendsøe M.P. Optimal shape design as a material distribution problem // *Struct. Optim.* 1989. Vol. 1, № 4. P. 193–202.
5. Sigmund O., Maute K. Topology optimization approaches A comparative review // *Struct. Multidiscip. Optim.* 2013. Vol. 48, № 6. P. 1031–1055.
6. Rozvany G.I.N. A critical review of established methods of structural topology optimization // *Struct. Multidiscip. Optim.* 2009. Vol. 37, № 3. P. 217–237.
7. Neves M.M., Sigmund O., Bendsøe M.P. Topology optimization of periodic microstructures with a penalization of highly localized buckling modes // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2002. Vol. 54, № 6. P. 809–834.

8. Tenek H. L., Hagiwara I. Eigenfrequency Maximization of Plates by Optimization of Topology Using Homogenization and Mathematical Programming // JSME Int. journal. Ser. C, Dyn. Control. Robot. Des. Manuf. 1994. Vol. 37, № 4. P. 667–677.
9. Dede E.M. Multiphysics Topology Optimization of Heat Transfer and Fluid Flow Systems // COMSOL Conference 2009 Boston. Boston, 2009.
10. Lohan D.J., Dede E.M., Allison J.T. Topology optimization for heat conduction using generative design algorithms // Struct. Multidiscip. Optim. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2017. Vol. 55, № 3. P. 1063–1077.
11. Haber R.B., Jog C.S., Bendsøe M.P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter // Struct. Optim. 1996. Vol. 11, № 1–2. P. 1–12.
12. Bendsøe M.P., Sigmund O. Material interpolation schemes in topology optimization // Arch. Appl. Mech. (Ingenieur Arch. 1999. Vol. 69, № 9–10. P. 635–654.
13. Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization // Int. J. Numer. Methods Eng. 1987. Vol. 24, № 2. P. 359–373.
14. Svanberg K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations // Soc. Ind. Appl. Math. 2002. Vol. 12, № 2. P. 555–573.
15. Iga A. et al. Topology optimization for thermal conductors considering design-dependent effects, including heat conduction and convection // Int. J. Heat Mass Transf. Elsevier Ltd, 2009. Vol. 52, № 11–12. P. 2721–2732.
16. Koguchi A., Kikuchi N. A surface reconstruction algorithm for topology optimization // Eng. Comput. 2006. Vol. 22, № 1. P. 1–10.
17. Norato J. et al. A geometry projection method for shape optimization // Int. J. Numer. Methods Eng. 2004. Vol. 60, № 14. P. 2289–2312.