

# Оптическая диагностика конвективных структур, индуцированных нестационарными граничными условиями в вертикальном слое воды

Ю.Н. Дубнищев<sup>1,А,С</sup>, В.А. Арбузов<sup>2,А,С</sup>, Э.В. Арбузов<sup>3,В,С</sup>,  
В.С. Бердников<sup>4,А,С</sup>, С.А. Кислицын<sup>5,А,С</sup>, О.С. Мелёхина<sup>6,С</sup>

<sup>А</sup> ФГБУН Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия

<sup>В</sup> ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия

<sup>С</sup> ФГБУН Новосибирский государственный технический университет, Россия

<sup>1</sup> ORCID: 0000-0001-7874-039X, [dubnistchev@itp.nsc.ru](mailto:dubnistchev@itp.nsc.ru)

<sup>2</sup> ORCID: 0000-0003-2404-326X

<sup>3</sup> ORCID: 0000-0001-9488-8650

<sup>4</sup> ORCID: 0000-0002-7819-1340

<sup>5</sup> ORCID: 0000-0002-4260-7025

<sup>6</sup> ORCID: 0000-0003-3486-4459

## Аннотация

Методами гильберт-оптики и сдвиговой интерферометрии визуализирован процесс эволюции конвективных структур в вертикальном слое воды, ограниченном плоскими теплообменными поверхностями при нестационарных граничных условиях. Восстановлено температурное поле. Выполнено численное моделирование поля изотерм в режиме монотонного охлаждения вертикальных стенок. Решена обратная задача реконструкции интерферограмм и гильбертограмм из численной модели температурного поля в конвективном течении.

**Ключевые слова:** оптическая диагностика, гильберт-оптика, сдвиговая интерферометрия, конвективные течения, фазовый переход.

## 1. Введение

Методы оптической диагностики в значительной мере определяют уровень экспериментальных исследований в современной гидро- и газодинамике. Выбор конвективных течений в качестве объекта приложений оптической диагностики объясняется особой важностью конвекции в геодинамике, физике атмосферы и океана, в гидродинамических и теплофизических процессах с фазовыми переходами [1, 2]. Интерес к этим проблемам обострился в последнее время в связи с интенсификацией циклических процессов таяния и образования льдов в арктических и антарктических районах, оказывающих огромное влияние на ми-

ровой океан и климат. Экспериментальные и теоретические исследования конвективных процессов и динамики фазового перехода вода–лёд с учётом аномалии плотности воды в области  $0 \div 4^\circ\text{C}$  необходимы для многочисленных технических и технологических приложений [3]. Изучение динамики фазовых переходов в переохлаждённой жидкости и эволюции конвективных структур в системе вода–лёд требует применения невозмущающих методов диагностики, основанных на современных достижениях оптики, лазерной техники и информационных технологий. Необходимость таких исследований мотивирована настоящая работа.

## 2. Метод и экспериментальная установка

Упрощённая схема исследовательского комплекса, содержащего систему оптической диагностики и экспериментальный стенд, показана на рисунке 1. Схема содержит осветительный модуль, состоящий из источника света 1 (ртутная лампа ДРШ–250), конденсорной линзы 2 и щелевой диафрагмы 3, помещённой в передней фокальной плоскости объектива 4, формирующего зондирующее поле в исследуемой среде. Такой средой является вода, заполняющая прямоугольную полость 5 с прозрачными стёклами оптического качества (рис. 2). Внутренние размеры полости  $136 \times 86 \times 30$  мм, боковые стенки образо-

ваны охлаждаемыми плоскими параллельными медными пластинами высокого качества 6 и 7. Температура одной из пластин ( $T_1$ ) регулируется и поддерживается термостатом в пределах до  $-28^\circ\text{C}$ . Температура другой пластины ( $T_2$ ) – в диапазоне от комнатной температуры до  $\sim 8,0^\circ\text{C}$ . Внутри пластин имеются полости, в которые подаётся охлаждающая жидкость из термостатов 8 и 9. Термостаты управляются компьютером 10 по заданной программе. Трубки, подающие хладагент в теплообменные боковые пластины, обозначены цифрами 11–14, трубки оттока – 15, 16. Расположение подающих трубок и трубок оттока может меняться в соответствии с условиями эксперимента. Расстояния между трубками – 80 мм.

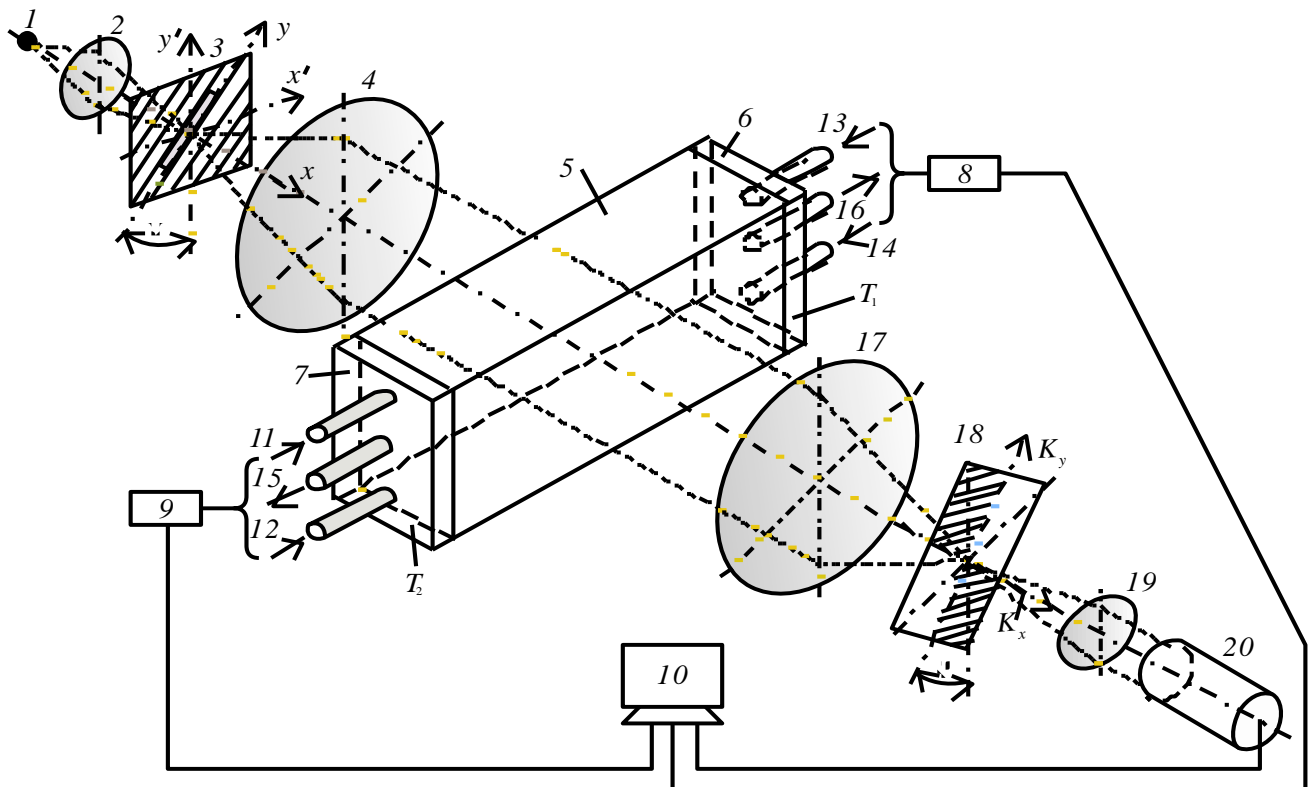


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.



Рис. 2. Исследуемая прямоугольная полость с водой. Видны оптические трубки, подающие хладагент в теплообменные боковые пластины.

Объектив 17 формирует в частотной плоскости фурье-спектр возмущённого исследуемой средой зондирующего светового поля. Квадрантный гильберт-фильтр 18 помещён в фурье-плоскость объектива 17. Частотная ось  $K_x$  гильберт-фильтра ортогональна направлению изображения целевой диафрагмы светового источника ( $\psi=45^\circ$ ). Объектив 19 выполняет обратное преобразование Фурье Гильберт-спектра оптического сигнала. Визуализированная фазовая структура светового поля, возмущенная исследуемой средой, регистрируется цифровой видеокамерой 20, подключенной к компьютеру 16.

Оптическая система диагностики реализована на базе серийного теневого прибора ИАБ-463М [3] с модифицированными модулями светового источни-

ка, пространственно-частотной фильтрации оптического сигнала, а также модулем регистрации изображений визуализированных фазовых возмущений светового поля, индуцированных исследуемой средой.

Зондирующее поле, сформированное объективом 4, проходит через исследуемую среду (воду), в которой боковыми термостатированными поверхностями 6 и 7 реализуются по заданной программе температурные граничные условия:  $T_1$  и  $T_2$ ,  $T_1 < T_2$ . В пространстве между термостатированными поверхностями возникают конвективные структуры, которые проявляются как возмущения полей оптической фазовой плотности. Эти структуры индуцируются рэлей-бенаровской конвекцией, осложнённой наличием фазового перехода и аномалией плотно-

сти воды в температурном интервале  $0 \div 4^\circ\text{C}$ .

Вблизи боковой термостатированной поверхности при росте градиента температуры вода становится переохлаждённой жидкостью, переходя в состояние неустойчивого равновесия. В такой среде возникает переход из жидкой фазы в твёрдокристаллическое состояние. Это – фазовый переход первого рода. Он проявляется возникновением волны кристаллизации и сопровождается энергосыделением, что в свою очередь влияет на динамическое распределение градиента оптической фазовой плотности в переохлаждённой воде и индуцирует фазовые возмущения в зондирующем световом поле, фурье-спектр которых  $s(K_x, K_y)$  формируется в частотной плоскости объектива 17.

Когерентная передаточная функция пространственно-частотного фильтра 18, выполняющего одномерное преобразование Гильберта, описывается выражением:

$$\begin{aligned} H(K_x, K_y) &= [e^{-i\varphi}\sigma(K_x) + e^{i\varphi}\sigma(-K_x)]\sigma(K_y) + \\ &+ [e^{i\varphi}\sigma(K_x) + e^{-i\varphi}\sigma(-K_x)]\sigma(-K_y) = \\ &= \cos\varphi - i \sin\varphi \operatorname{sgn} K_x, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $K_x$  и  $K_y$  – пространственные частоты;  $\sigma(\pm K_x)$  и  $\sigma(\pm K_y)$  – функции Хевисайда;  $\varphi$  – фазовый сдвиг, задаваемый соответствующим квадрантом пространственно-частотного фильтра. Фильтр с когерентно-передаточной функцией (1) выполняет одномерное преобразование Фуко–Гильберта.

В фурье-плоскости  $H(K_x, K_y)$  пространственно-частотная ось  $K_x$  ортогональна изображению щелевого источника. Фурье-спектр светового поля непосредственно после фильтра:

$$s(K_x, K_y)H(K_x, K_y) = s(K_x, K_y) [(\cos\varphi - i \sin\varphi \operatorname{sgn}K_x)] =$$

$$= s(K_x, K_y) \cos\varphi + \hat{s}_x(K_x, K_y) \sin\varphi. \quad (2)$$

Здесь  $s(K_x, K_y)$  – пространственно-частотный фурье-спектр светового поля, возмущённого исследуемой средой;  $\hat{s}_x(K_x, K_y) = -i \operatorname{sgn}(K_x)s(K_x, K_y)$  – фурье-спектр светового поля, подвергнутого одномерному преобразованию Гильберта по оси  $K_x$ . Фазовый сдвиг  $\varphi$  является функцией длины волны  $\lambda$  зондирующего светового поля:  $\varphi = \varphi(\lambda)$ . При длине волны  $\lambda = \lambda_0$ , удовлетворяющей условию  $\varphi(\lambda) = \pi/2$ , фурье-фильтр 18 выполняет одномерное преобразование Гильберта:

$$\hat{s}_x(K_x, K_y) = -i \operatorname{sgn}(K_x)s(K_x, K_y) \quad (3)$$

Если исследуемая среда индуцирует исключительно фазовые возмущения зондирующего поля, фурье-спектр возмущённого поля описывается выражением  $s(K_x, K_y) = e^{i\psi(K_x, K_y)}$ .

Фильтрованный фурье-спектр фазовых возмущений:

$$\begin{aligned} s(K_x, K_y)H(K_x, K_y) &= \\ &= \{\sum_m [1 + i\hat{\Psi}_{m_x}(K_x, K_y)]\} [-i \operatorname{sgn}K_x] = \\ &= \sum_m \hat{\Psi}_{m_x}(K_x, K_y), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\hat{\Psi}_{m_x}(K_x, K_y)$  – фурье-спектр фазовых возмущений, соответствующий гильберт-полосе  $m$ -го порядка. Здесь учтено, что гильберт-преобразование обладает квазидифференцирующими свойствами. Поэтому гильберт-образ отображает структуру градиентов поля фазовых возмущений.

Объектив 19 камкордера выполняет фурье-преобразование фильтрованного фурье-спектра фазовых возмущений:

$$\sum_m \hat{\Psi}_{m_x}(K_x, K_y) \leftrightarrow \sum_m \hat{\Psi}_{m_x}(x, y) \quad (5)$$

Визуализированные посредством одномерного гильберт-преобразования фазовые структуры (4) регистрируются фотоматрицей камкордера.

Изображение одномерного гильберт-образа фазовых возмущений

$$\sum_m |\hat{\psi}_{m_x}(x, y)|^2$$

анализируется в системе координат  $(x', y')$ , повернутой относительно системы координат  $(x, y)$  на угол  $\alpha=45^\circ$ :

$$\sum_m |\hat{\psi}_{m_x}(x', y')|^2, \quad (6)$$

Где  $x' = \frac{1}{2}(x + y)$ ;  $y' = \frac{1}{2}(x - y)$ .

В случае широкополосного источника выполняется одномерное преобразование Фуко–Гильберта с когерентной передаточной функцией фильтра (1). Результатом фильтрации является трансформация поля фазовых возмущений в аналитический сигнал, являющийся су-

перпозицией фильтрованного сигнала и его гильберт-образа. Соответственно, сигнал, зарегистрированный фотоматрицей, представляет собой суперпозицию изображений фазового возмущения и его гильберт-образа. Регистрируемое изображение представляет собой структуру, состоящую из гильберт-полос, отображающих возмущения градиентов оптической фазовой плотности в исследуемой среде.

### 3. Результаты

На рисунке 3 показана выборка кадров из видеофильма, иллюстрирующая гильберт-визуализацию конвективных структур в слое пресной воды, ограниченном вертикальными плоскими теплообменными поверхностями.

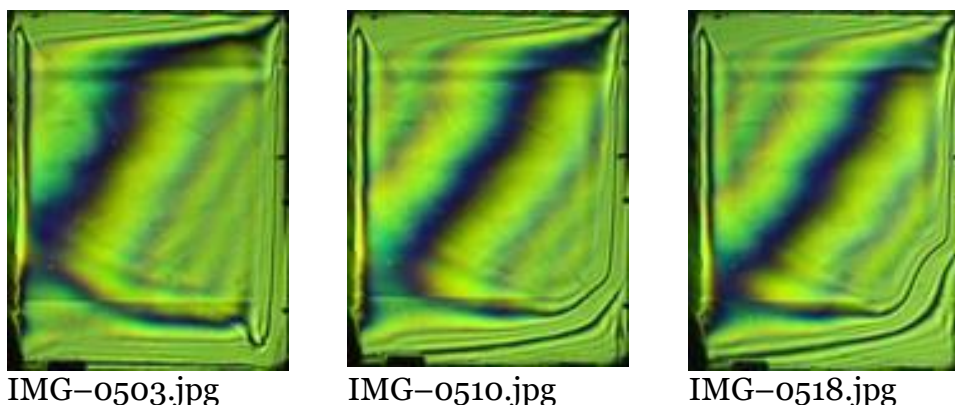
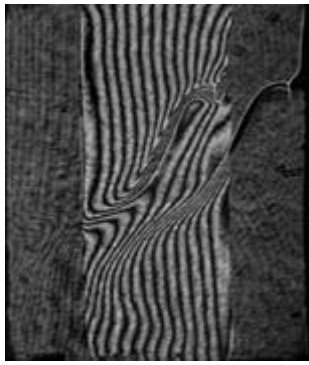
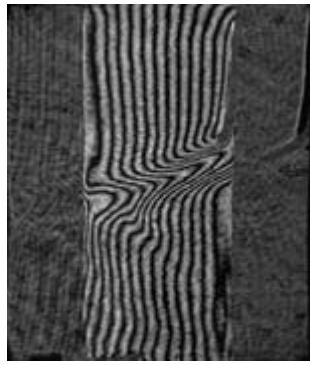


Рис. 3. Кадры видеофильма, иллюстрирующие гильберт-визуализацию конвективных структур и фазового перехода в воде.

На рисунке 4 представлен пример конвективных структур и фазового перехода в том же слое, визуализированных методами сдвиговой интерферометрии. Гильбертограммы и сдвиговые интерферограммы отображают экстремумы фазовых градиентов и соответствуют изотермам.



22.jpg



25.jpg



28.jpg

Рис. 4. Сдвиговые интерферограммы, визуализирующие конвективные структуры и фазовый переход в вертикальном слое пресной воды.

Рисунок 5 иллюстрирует аппроксимацию интерференционных полос кривыми Безье.



Рис. 5. Аппроксимация кривыми Безье интерференционных полос на сдвиговой интерферограмме.

Использование для аппроксимации полиномов Бернштейна позволяет построить сетку, адаптирующуюся к деформациям интерференционных линий. По полученной сетке проводится двумерная сплайн-интерполяция и восстанавливается температурное поле (рисунки 6, 7).

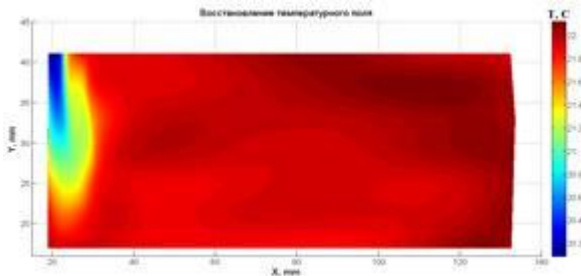


Рис. 6. Восстановленное температурное поле по сдвиговой интерферограмме (оси x–y).

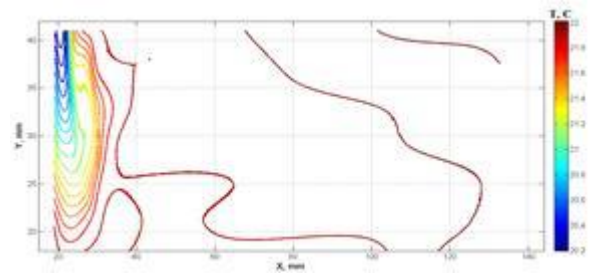


Рис. 7. Изотермы восстановленного температурного поля (оси x–y).

На рисунке 8 представлены результаты численного моделирования изотерм температурного поля, индуцированного нестационарными теплообменными граничными

условиями в режиме монотонного охлаждения вертикальных стенок. В качестве верификации выполнена реконструкция сдвиговых интерферограмм и гильберт-изображений из численной модели изотерм.

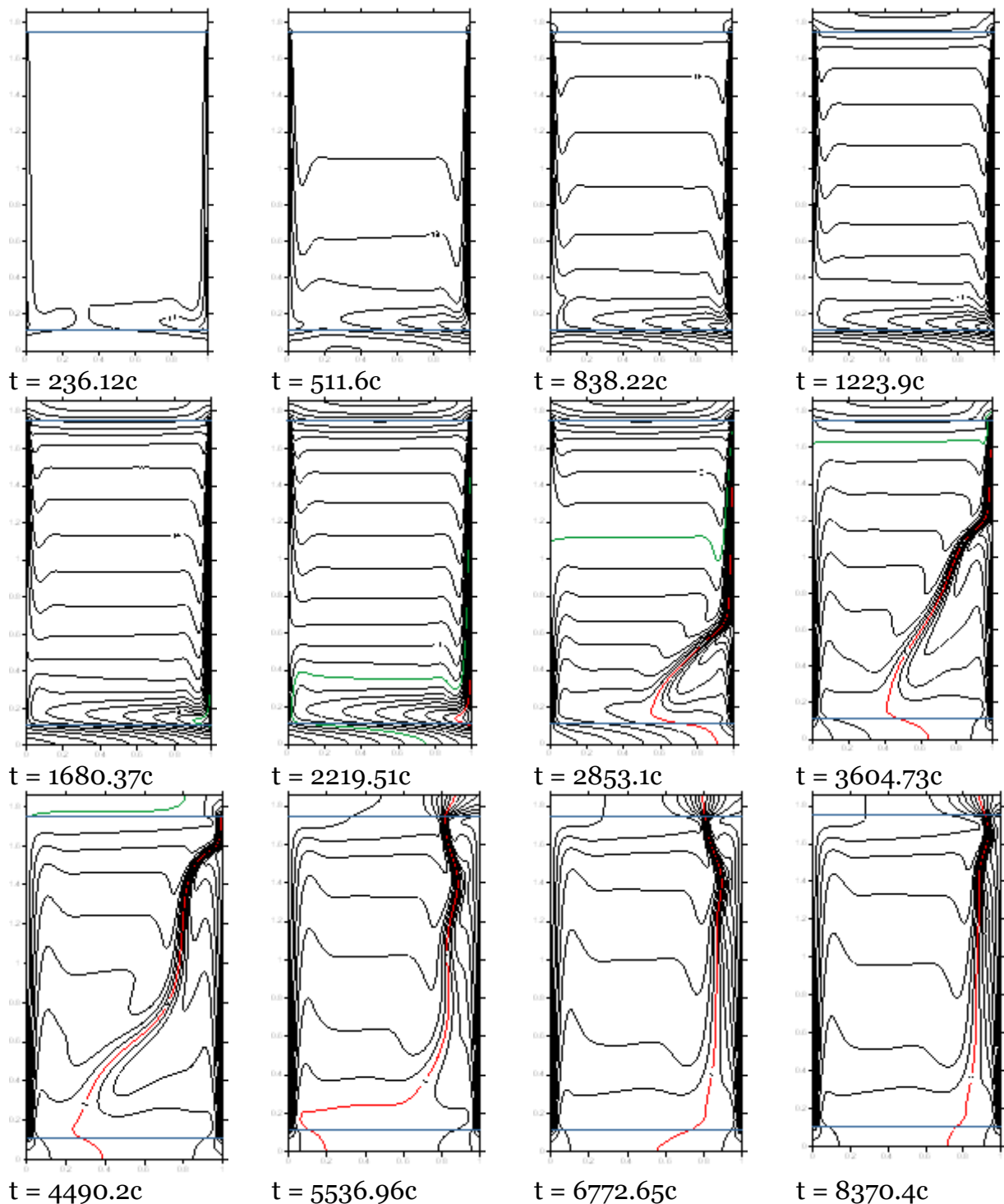


Рис. 8. Численное моделирование эволюции изотерм, индуцированных нестационарными граничными условиями в вертикальном слое воды.

Размеры расчетной области: толщина слоя жидкости 84 мм, высота слоя 136 мм. Начальная температура системы 20 градусов Цельсия. Левая стенка охлаждается линейно во времени за 2500 с до 8°C, а правая до 0°C за тот же промежуток времени. Верхняя и нижняя горизонтальные границы полости имеют толщину 10 мм. Внешние поверхности (оргстекло) горизонтальных стенок адиабатические. На рисунке 8 изотерма с  $T=4^{\circ}C$  выделена красным цветом, а зеленым выделена изотерма с  $T=8^{\circ}C$ .

Конвективный теплообмен в жидкости в двумерной постановке описывается безразмерной системой уравнений Навье–Стокса, энергии и неразрывности в приближении Буссинеска, записанной в терминах температура  $T$ , вихрь  $\omega$  и функция тока  $\psi$ :

$$\frac{\rho_f(T)}{\rho_f} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\rho_f(T)}{\rho_f} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + Gr \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\omega, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Gr = \frac{g \cdot \beta_f(T) \cdot H^3 \Delta T}{\nu_f^2}.$$

Кондуктивный теплообмен в массивных горизонтальных стенках из оргстекла описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\rho_w c_w}{\rho_f c_f} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\lambda_w}{\lambda_f \cdot Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (8)$$

Обозначения в уравнениях 7 и 8:  $\nu_f$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности жидкости,  $\text{Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$ ;  $\lambda_w$  – коэффициент теплопроводности стенки,  $\text{Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$ ;  $\rho_f$  – плотность жидкости,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\rho_w$  – плотность горизонтальной стенки,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $c_{pf}$  – удельная теплоемкость жидкости,  $\text{Дж}/\text{кг}\cdot\text{К}$ ;  $c_w$  – удельная теплоемкость стенки,  $\text{Дж}/\text{кг}\cdot\text{К}$ ;  $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;  $\beta_f$  – коэф. объемного теплового расширения,  $\text{К}^{-1}$ ;  $H$  – высота слоя жидкости,  $\text{м}$ ;  $Pr$  – число Прандтля;  $Gr$  – число Грасгофа;  $x, y$  – безразмерные декартовы координаты;  $T$  – безразмерная температура;  $\omega$  – безразмерный вихрь;  $\psi$  – безразмерная функция тока;  $u, v$  – безразмерные компоненты скорости: горизонтальная и вертикальная.

Задачи решены численно методом конечных элементов в сопряженной постановке. При решении уравнения движения учтены зависимости плотности и коэффициента объемного теплового расширения от температуры. Для расчетов постоянных параметров были использованы фиксированные значения теплофизических свойств воды при  $0^\circ\text{C}$  и оргстекла. Свойства воды: плотность  $\rho_f = 999,839 \text{ кг}/\text{м}^3$ ; коэффициент кинема-

тической вязкости  $\nu_f = 1,793 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ; коэффициент теплопроводности  $\lambda_f = 0,554 \text{ Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$ ; удельная теплоемкость  $c_{pf} = 4218 \text{ Дж}/\text{кг}\cdot\text{К}$ ; теплота кристаллизации  $R = 333,7 \text{ кДж}/\text{кг}$ . Свойства стенки (оргстекло):  $\rho_f = 1180 \text{ кг}/\text{м}^3$ ;  $\lambda_w = 0,195 \text{ Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$ ;  $c_w = 1270 \text{ Дж}/\text{кг}\cdot\text{К}$ .

На твердых границах в системе для скорости (и, как следствие, для функции тока) заданы условия прилипания и не протекания. Краевое условие для вихря получаем из поля функции тока, используя метод сопряженных результатов [4]. На границах раздела жидкости с твердыми стенками ставится условие неразрывности температуры и теплового потока.

Использовалась неравномерная треугольная сетка, сгущенная в различной степени ко всем границам расчетной области, с количеством узлов  $\approx 4 \cdot 10^4$ . На элементах задавались линейные базисные функции. Для построения триангуляции был использован клеточный пошаговый алгоритм по максимальному углу [5]. В программе реализован итерационный процесс, в который при необходимости подставляются нужные значения переменных с предыдущих шагов и вычисленные значения коэффициентов от параметров. При этом



сначала находится температура, затем вихрь, функция тока. В итерационном процессе на временном шаге использовался метод релаксации. Конечно-элементная система линейных алгебра-

ических уравнений решается посредством метода локально-оптимальной схемы (LOS) с неполным разложением на нижнюю и верхнюю треугольные матрицы (LU) [4].

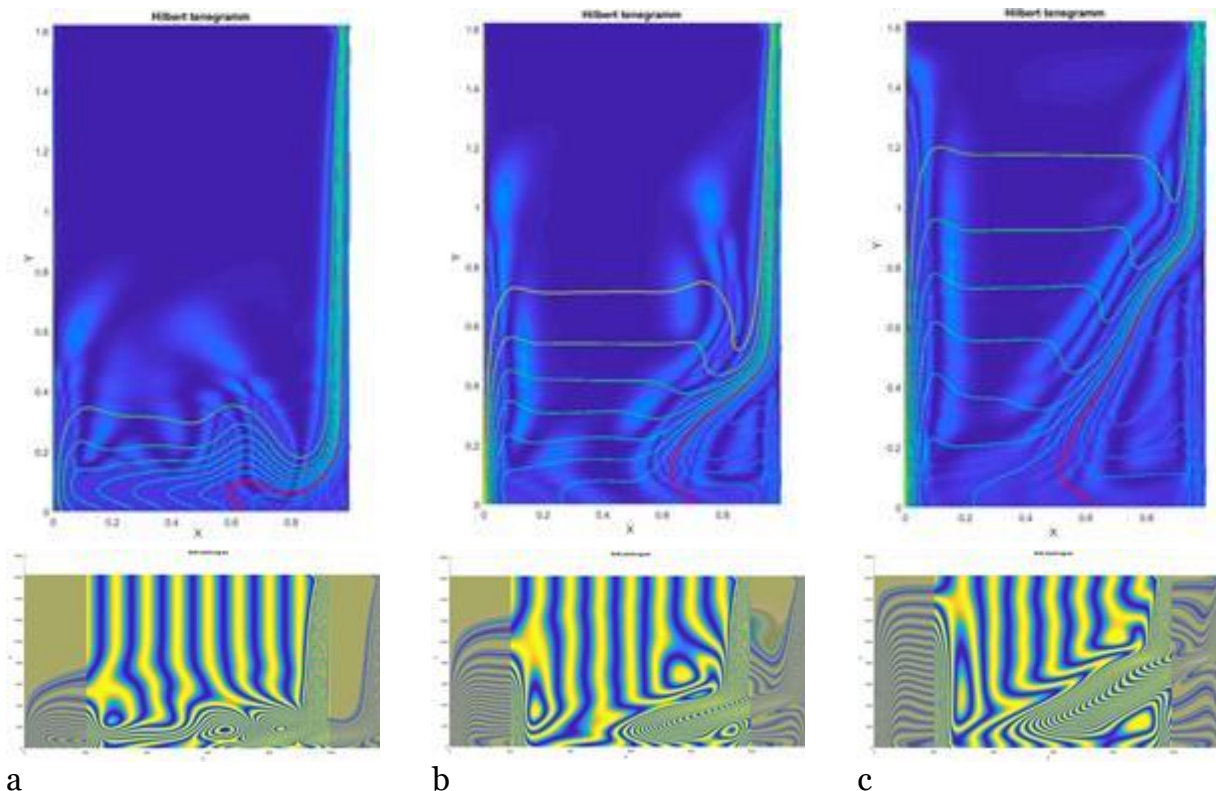


Рис. 9. Смоделированное поле изотерм, соответствующие ему гильбертограммы и сдвиговые интерферограммы (красная линия-изотерма  $+4^{\circ}\text{C}$ ).

На рисунке 9 в качестве примера представлены гильбертограммы и сдвиговые интерферограммы, синтезированные из численных моделей изотерм, относящимся к моментам времени: а) – 122 с; б) – 305 с; в) – 710 с. после включения термостатов, управляющих температурой теплообменных поверхностей.

Изотерма, соответствующая инверсии плотности воды ( $+4^{\circ}\text{C}$ ), выделена красным цветом. Она делит пространство на две области. Над изотермой ( $+4^{\circ}\text{C}$ ) возникает вихревое движение конвективных структур, направленное по часовой стрелке. Под этой изотермой вихревое движение конвективных структур происходит против часовой стрелки. Сопряжённые вихри, сформированные над и под изотермой ( $+4^{\circ}\text{C}$ ), переносят тёплую воду вниз, а охлаждённую воду – вверх.

На рисунке 10 представлены сдвиговые интерферограммы: а – экспериментально полученная; б – реконструированная из численной модели поля изотерм.

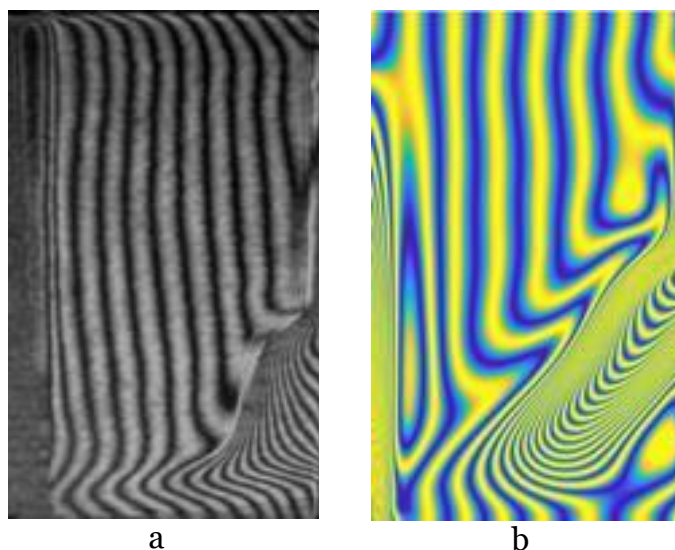


Рис. 10. Сдвиговые интерферограммы: а – экспериментальная; б – смоделированная.

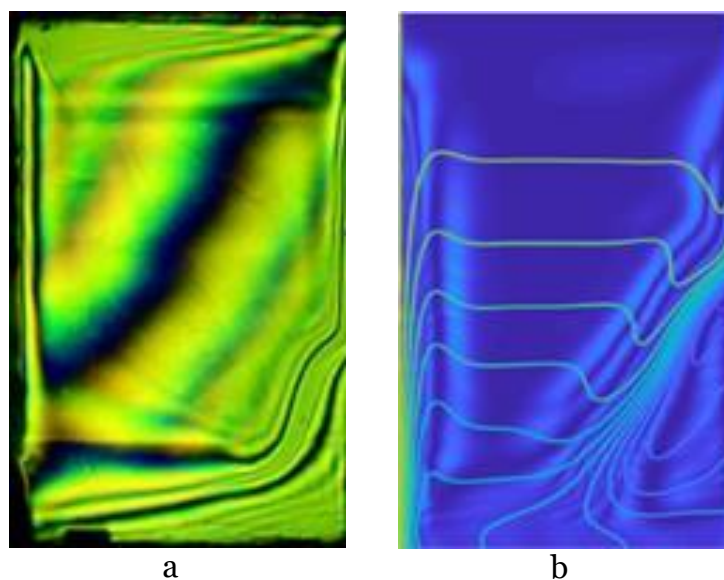


Рис. 11. Гильбертограммы: а – экспериментальная; б – смоделированная.

На рисунке 11 приведены гильбертограммы: а – полученная экспериментально; б – синтезированная из структуры численно смоделированных изотерм. Хорошо видны гильберт-полосы, соответствующие экстремумам градиентов изотерм. Рисунки 9–11 иллюстрируют качественную адекватность результатов численного моделирования и эксперимента.

## Заключение

Изучение индуцированных нестационарными граничными условиями конвективных течений и их влияния на структуру и динамику фронтов кристаллизации актуальны для развития новых технологий выращивания кристаллов

[6], понимания аномалий процессов формирования и таяния льда в арктических и антарктических районах. Исследования к настоящему времени выполнены только в узком диапазоне параметров и пока не имеют системного характера. Похожими зависимостями плотности от температуры обладают растворы галлия, эвтектики кадмий–ртуть–теллур и некоторых других веществ и материалов. Поэтому вода может использоваться в качестве жидкости-имитатора расплава для отработки технологий получения монокристаллов. Область приложений результатов, полученных адаптированными к этой проблеме методами оптической диагностики и численного моделирования, не

ограничивается течениями, имеющими конвективную природу. Она может быть расширена на решение задач фундаментального и прикладного характера в экспериментальной гидро- и газодинамике, теплофизике, биологии, медицине.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-38-00790 мол. а).

## **Список литературы**

1. Smits A.J., Lim N.N. Flow Visualization. Imperial College Press. 2010.

2. Lappa M. Thermal Collection: Patterns, Evolution and Stability. Chichester: John Willey Sons. 2010.

3. Арбузов В.А., Арбузов Э.В., Дубнищев Ю.Н., Бердников В.С., Мелёхина О.С. Оптическая диагностика фронта кристаллизации, индуцированного температурным градиентом на верхней границе горизонтального слоя жидкости. Автометрия. Т. 53, № 2. С. 39–44.

4. Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. Новосибирск: НГТУ, 2007. 896 с.

5. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и её применение. Томск: ТГУ, 2002. 128 с.

6. Бердников В.С., Винокуров В.А., Винокуров В.В. Влияние нестационарных режимов свободной и смешанной конвекции расплавов на теплообмен и формы фронтов кристаллизации в методе Чохральского // Известия РАН. Серия Физическая. 2017. Т. 81, № 10. С. 1395–1402.