

Визуализация тензорных полей на основе геометрического представления тензоров

Ю.И. Димитриенко¹, Е.А. Губарева², С.В. Сборщиков³

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана (МГТУ им.Н.Э.Баумана), Москва, Россия

¹ ORCID: 0000-0002-8610-8770, dimit@bmstu.ru

² ORCID: 0000-0003-1678-3372, elena.a.gubareva@yandex.ru

³ ORCID: 0000-0001-5888-3019, servashor@gmail.com

Аннотация

По сравнению со скалярными полями (температурой, плотностью, давлением и др.) и векторными полями (вектором скорости, вектором перемещений), принципы 3D визуализации которых хорошо разработаны в настоящее время, методы визуализации полей тензоров 2-го ранга практически отсутствуют. Поэтому для основного тензора, характеризующего напряженное состояние в твердых телах – тензора напряжений Коши, в настоящее время применяются в основном покомпонентная визуализация, как набора скалярных полей или символная 2D визуализация, в которой каждый тензор рассматривается в виде эллипса. В настоящей работе представлены результаты разработки нового метода визуализации тензорных полей, как в двумерном, так и в трехмерном пространстве, которое использует так называемое геометрическое представление тензоров 2-го ранга, в виде упорядоченной совокупности 4 или 6 векторов, соответственно. Идея и теоретическая основа метода были ранее предложены Ю.И. Димитриенко. Представлены результаты разработки специализированного программного модуля TensorView, который позволяет визуализировать тензорные поля с использованием геометрического представления тензоров. Представлены примеры использования визуализации тензорных полей в задаче о моделировании напряженно-деформированного состояния элементов авиационных конструкций. Предложенный принципиально новый метод визуализации тензорных полей позволяет дать представление о тензорах, как о цельных инвариантных объектах, обобщая при этом хорошо известные представления о векторных полях в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: тензор, тензорное поле, геометрическое представление тензоров, визуализация тензорных полей.

1. Введение

Тензоры второго ранга широко применяются в различных разделах математики, механики, физики, информатики и других наук. В механике и электродинамике сплошных сред универсальные законы сохранения и определяющие соотношения для сплошных сред по своей сути имеют тензорный характер, и их формальная запись наиболее компактно осуществляется с помощью операций и символов тензорного исчисления [1]. Само оперирование с тензорами и тензорными полями при определенных навыках не вызывает особых

сложностей, в том числе и у начинающих обучение студентов, и, наоборот, является привлекательным, благодаря компактности (один символ соответствует целому набору скалярных компонентных соотношений), наглядности (отсутствие явно выписанных индексов не затеняет физической сути соотношений) и определенной эстетической привлекательности, что не мало важно как для обучающихся студентов, так и для "продвинутых пользователей" тензорного исчисления.

Для визуализации скалярных полей, таких как температура, плотность, давление и других, возникающих в резуль-

тате решения начально-краевых задач в механике и физике, в подавляющем большинстве случаев используют цветное изображение поверхности тела, в котором задано поле, или сечения поверхности тела. Устанавливается шкала соответствия между значениями скалярного поля и цвета. Программных средств, которые позволяют визуализировать подобным образом скалярные поля, в настоящее время существует очень много как коммерческих [2], так и свободно-распространяемых [3] и авторских [4-6].

Для визуализации векторных полей, таких как поле вектора скорости и вектора перемещений точек тела, существует 2 основных способа визуализации: с помощью 3D визуализации отдельных компонент векторов как скалярных полей аналогично обычным скалярным полям, или же с помощью визуализации векторов как геометрических объектов – направленных отрезков. Второй способ обладает экономичностью: для визуализации вектора в 3-х мерном пространстве требуется только одно 3D изображение вместо 3-х отдельных при покомпонентной скалярной визуализации. Кроме того, геометрическое представление вектора (ГПВ) дает представление о векторе, как об инвариантном цельном объекте, как единой сущности, в отличие от скалярного покомпонентного представления, которое зависит от базиса, в котором выбраны компоненты вектора. Большинство коммерческих и свободно распространяемых программных средств 3D визуализации позволяет реализовывать ГПВ для визуализации векторных полей.

Для визуализации полей тензора 2-го ранга, например, поля симметричного тензора напряжений, которое играет важнейшую роль для оценки прочности конструкций, в настоящее время применяют в подавляющем большинстве только покомпонентный способ, при котором генерируются 6 скалярных 3D изображений отдельных компонент тензора напряжений. Такой способ не дает возможности получить представ-

ление о тензоре напряжений как о цельном объекте. В геофизике применяется способ визуализации 2D полей тензора напряжений, при котором в каждой точке тензор 2 –го ранга представляется в виде эллипсоида [7,8]. Этот способ недостаточно информативен, плохо переносится на случай 3-х мерного пространства и является только иллюстративным, а не строгим геометрическим образом тензоров 2-го ранга, подобно тому, как направленные отрезки образуют множество геометрических векторов, строго подчиняющихся аксиоматике векторного пространства.

В настоящей работе представлены результаты разработки нового метода визуализации тензорных полей, как в двумерном, так и в трехмерном пространстве, который использует так называемое геометрическое представление тензоров (ГПТ) 2-го ранга. ГПТ представляет собой упорядоченную совокупность 4 или 6 векторов – в двумерном и трехмерном случае, соответственно, для которой можно ввести операции, обобщающие действия с векторами [9,10]. ГПТ полностью соответствует формальному алгебраическому определению тензора, как класса эквивалентности векторных наборов заданной длины [10]. Идея и теоретическая основа метода была ранее предложена Ю.И. Димитриенко [9].

Для повышения наглядности геометрического изображения тензоров и основных операций с ними, а также для визуализации результатов научных исследований, в которых применяются тензорные поля, например, результатов расчетов напряженно-деформированного состояния инженерных конструкций, авторами данной публикации был предложен и разработан специальный программный модуль TensorView, который позволяет в автоматизированном режиме строить геометрическое изображения тензоров и основных операций с ними, а также изображения тензорных полей (тензоров напряжений, деформаций и других полей), которые являются, например, результатом численного расчета задач механики сплошной среды.

Данная публикация посвящена описанию разработки программного модуля TensorView и его основным функциональным возможностям.

2. Назначение программного модуля TensorView

Программный модуль TensorView (рисунок 1) предназначен для выполнения следующих операций:

- компьютерной визуализации тензоров 2-го ранга в 3-х мерном евклидовом пространстве, с использованием ГПТ;
- визуализации основных алгебраических операций с тензорами 2-го ранга (сложения, умножения на число, скалярного умножения тензоров и векторов и др.);
- визуализации тензорных полей, являющихся результатами решения задач механики деформируемого

твердого тела и механики жидкостей и газов или электродинамики сплошных сред или других задач, в которых применяются тензорные поля.

Программный модуль TensorView использует графические библиотеки OpenGL и qt, вычислительная часть модуля написана на C++. В качестве входных данных TensorView использует текстовый формат данных, которые представлены в традиционном для конечно-элементных решателей виде - списками: координаты узла сетки, значения координат векторов, образующих тензор. Такой формат данных позволяет легко интегрировать модуль TensorView в любой вычислительный комплекс. В настоящее время модуль TensorView используется разработчиком для демонстрационных и образовательных целей. Планируется разработка версии TensorView как Web-приложения.

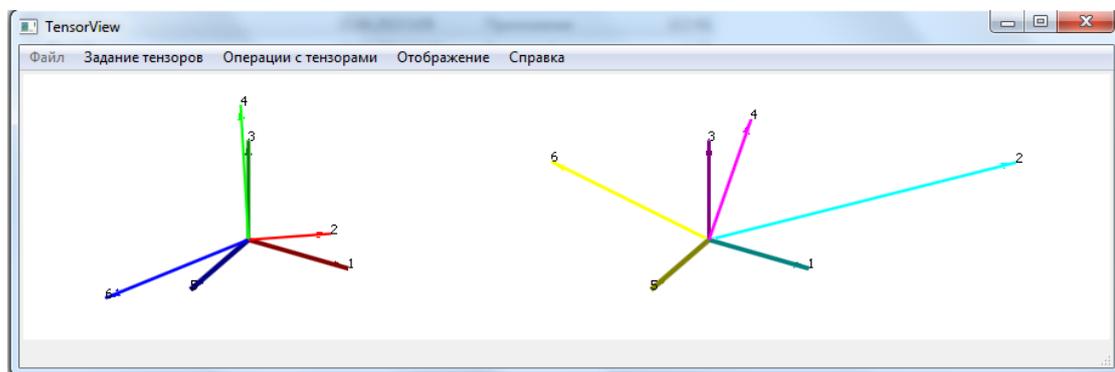


Рисунок 1. Главное окно программного модуля TensorView

3. Геометрическое определение тензора второго ранга и его визуализация с помощью TensorView

В работе [9] впервые было предложено геометрическое определение тензора 2-го ранга, которое позволяет дать наглядное геометрическое представление тензора, подобно вектору в 3-х мерном евклидовом пространстве E_3 , как направленному отрезку.

Наиболее простой вариант геометрического определения тензора второго

ранга в E_3 , согласно [10], может сформулирован следующим образом.

Рассмотрим 3-х мерное евклидово пространство элементарной геометрии E_3 , в котором аксиоматически введены такие геометрические понятия как: точка, прямая, плоскость, отрезок, расстояние между точками, угол между прямыми и др. Это пространство изучается в элементарной математике (элементарной геометрии) и классическом курсе аналитической геометрии, а в курсе линейной алгебры оно обычно используется как наглядный пример общего абстрактного евклидова пространства (точечно-евклидова), в котором можно

визуализировать основные алгебраические понятия, в частности, абстрактное понятие вектора - как направленного отрезка. Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E_3$, также являются элементами 3-х мерного евклидова пространства E_3 .

Тензором 2-го ранга \mathbf{T} в пространстве E_3 , согласно [10], называют упорядоченную совокупность 6 векторов (векторный набор) $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}^1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}^2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}^3 \in E_3$ с общим началом, вместе со всеми эквивалентными ему векторными наборами.

Векторы \mathbf{b}^i - называют правыми, а \mathbf{a}_i - левыми.

Программный модуль TensorView позволяет визуализировать тензор, введенный с помощью данного определения (рисунок 2): векторы \mathbf{b}^i и \mathbf{a}_i - раскрашиваются различными цветами и нумеруются: векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ - цифрами 1,3,5 векторы $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3$ - цифрами 2,4,6.

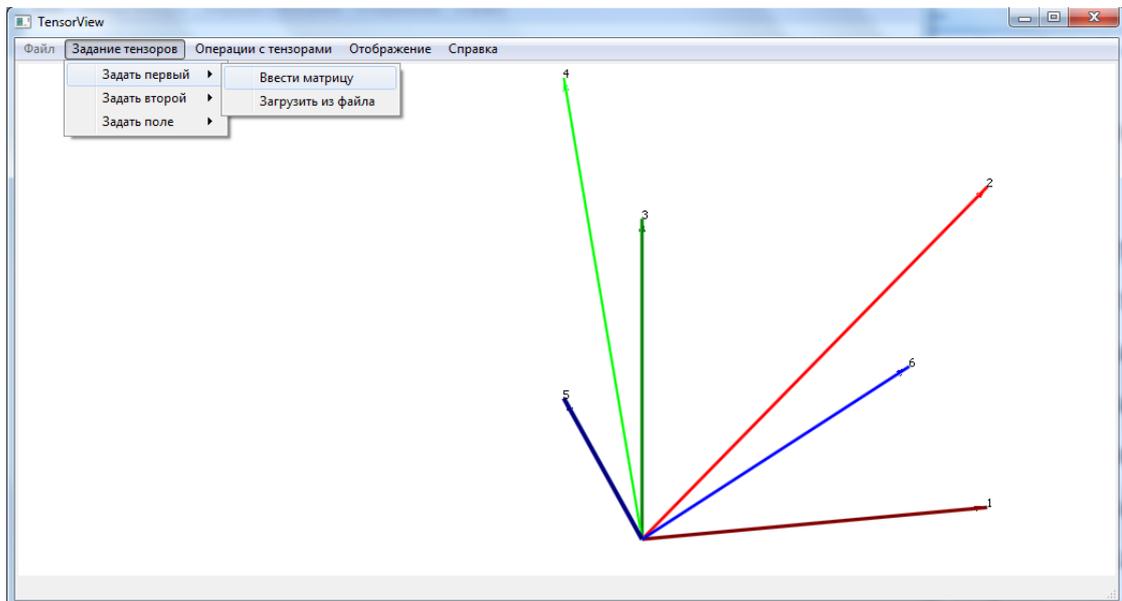


Рисунок 2. Геометрическое представление тензора 2-го ранга (отдельного представителя тензора) в программном модуле TensorView, как упорядоченной совокупности 6 векторов

Обозначается тензор \mathbf{T} одним из 3-х следующих способов

$$\mathbf{T} = [\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^1 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^2 \mathbf{a}_3 \mathbf{b}^3] \equiv [\mathbf{a}_i \mathbf{b}^i] \equiv \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i \quad (1)$$

Скобки [] в (1) указывают на то, что тензор это именно множество векторных наборов, эквивалентных данному $\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^1 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^2 \mathbf{a}_3 \mathbf{b}^3$, которое образует класс эквивалентности [10], а \otimes - широко используемый знак тензорного умножения.

Векторный набор $\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^1 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^2 \mathbf{a}_3 \mathbf{b}^3$ состоит из 3 пар векторов $\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^1$, $\mathbf{a}_2 \mathbf{b}^2$, $\mathbf{a}_3 \mathbf{b}^3$. Используемое в определении понятие эквивалентности 2-х векторных наборов

(эквивалентность обозначается знаком \sim), означает, что у этих наборов имеется хотя бы один из 3-х следующих признаков:

а) какие-то из пар векторов меняются местами, например:

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^1 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^2 \mathbf{a}_3 \mathbf{b}^3 \sim \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^2 \mathbf{a}_3 \mathbf{b}^3 \mathbf{a}_1 \mathbf{b}^1 \quad (2)$$

б) вносится одновременно числовой множитель s к левым и множитель $\frac{1}{s}$ к правым векторам:

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}^1 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^2 \mathbf{a}_3 \mathbf{b}^3 \sim (s \mathbf{a}_1) \left(\frac{1}{s} \mathbf{b}^1 \right) (s \mathbf{a}_2) \left(\frac{1}{s} \mathbf{b}^2 \right) (s \mathbf{a}_3) \left(\frac{1}{s} \mathbf{b}^3 \right) \quad (3)$$

в) если у одной из пар есть нулевой вектор, то эту пару можно заменить на любую другую также с нулевым вектором, например $\mathbf{a}_1 \mathbf{0}$ на $\mathbf{0b}^1$:

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{0a}_2 \mathbf{b}^2 \mathbf{a}_3 \mathbf{b}^3 \sim \mathbf{0b}^1 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}^2 \mathbf{a}_3 \mathbf{b}^3 \quad (4)$$

Можно доказать [10], что введенные признаки эквивалентности (2)-(4) обеспечивают выполнение следующего важного свойства тензора – перенесение матрицы преобразования от левых векторов к правым и наоборот

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}_i \otimes (Q^j_j \mathbf{d}^j) = (\mathbf{a}_i Q^i_j) \otimes \mathbf{d}^j \quad (5)$$

4. Задание тензора в программном модуле TensorView

Чтобы визуализировать тензор 2-го ранга, необходимо сначала его задать (сгенерировать). Это можно сделать 2 способами: с помощью задания 3-х пар векторов $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}^i$ или с помощью задания компонент тензора T^{ij} в ортонормированном декартовом базисе \mathbf{e}_j .

В первом способе задаются 3 пары векторов $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}^i$ с общим началом, каждый из векторов задается своими компонентами в фиксированном ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

$$\mathbf{a}_i = A_i^j \mathbf{e}_j \quad \text{и} \quad \mathbf{b}^i = B^{ij} \mathbf{e}_j \quad (6)$$

Таким образом, в этом способе задание тензора \mathbf{T} (1) осуществляется вводом значений компонент 2-х матриц A_i^j и B^{ij} (рис.3), задающих 3 левых вектора \mathbf{a}_i и 3 правых вектора \mathbf{b}^i .

Во втором способе непосредственно задается матрица T^{ij} компонент тензора \mathbf{T} в единичном базисе \mathbf{e}_j . По этой матрице T^{ij} вычисляются левые и правые векторы тензора

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{b}^i = T^{ij} \mathbf{e}_j \quad (7)$$

которые позволяют визуализировать тензор $\mathbf{T} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i$. Очевидно, что можно построить и другого представителя тензора с таким векторным набором $\mathbf{a}_i = \delta_{ik} T^{kj} \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{b}^i = \delta^{ij} \mathbf{e}_j$, где δ^{ij}, δ_{ik} - символы Кронекера.

Формулы (1) и (7) дают хорошо известную запись тензора - разложение по диадному базису $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$:

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (8)$$

Аналогично в программе TensorView задается еще один тензор при выборе вкладки «Второй тензор», что необходимо для визуализации операций с тензорами.

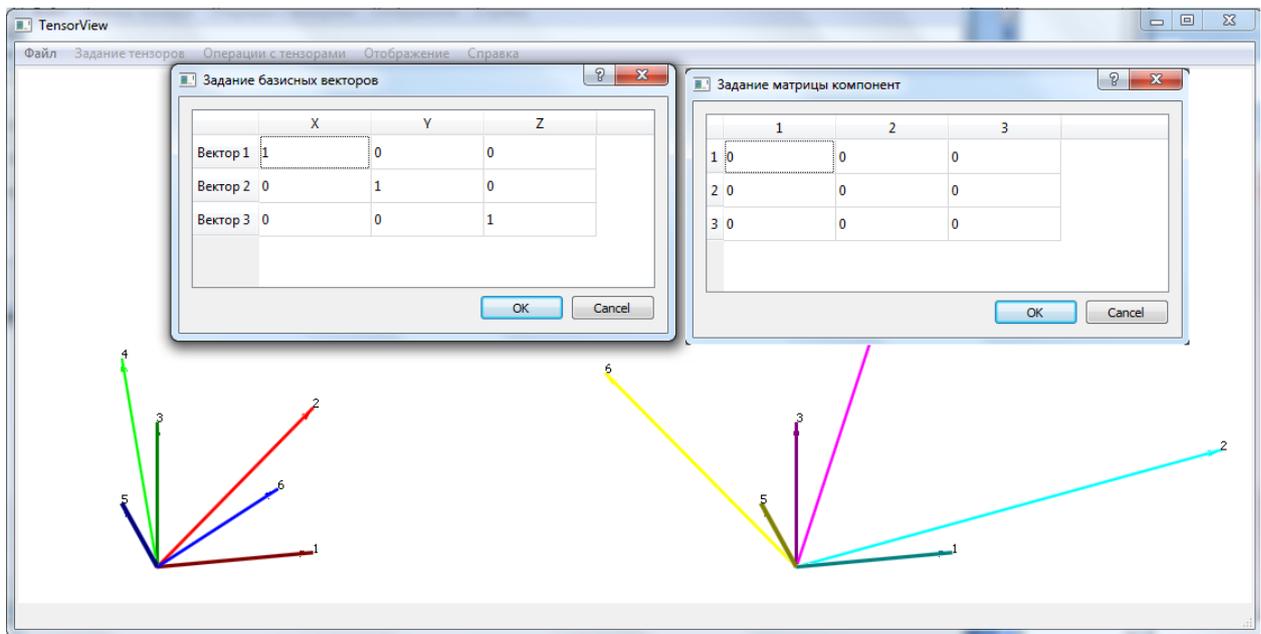


Рисунок 3 Задание тензора в программном модуле TensorView

5. Визуализация в TensorView основных операций с тензорами второго ранга

а) Нахождение и визуализация представителя тензора в новом базисе

Поскольку тензор – это класс эквивалентности векторных наборов, то есть фактически континуальное множество векторных наборов, то визуализировать весь тензор как объект – не представляется возможным. Визуализируется не сам тензор, а только какой-либо его представитель. Важной задачей является переход от одного представителя тензора к другому.

В каждом векторном базисе $\mathbf{c}_i \in E_3$ у тензора $\mathbf{T} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i$ есть единственный представитель тензора (векторный набор) – $\mathbf{T}_d = \mathbf{c}_1 \mathbf{d}^1 \mathbf{c}_2 \mathbf{d}^2 \mathbf{c}_3 \mathbf{d}^3 = \mathbf{c}_i \mathbf{d}^i$, у которого базис \mathbf{c}_i выступает в качестве левых векторов и единственный представитель $\mathbf{T}_f = \mathbf{f}^1 \mathbf{c}_1 \mathbf{f}^2 \mathbf{c}_2 \mathbf{f}^3 \mathbf{c}_3 = \mathbf{f}^i \mathbf{c}_i$, у которого базис \mathbf{c}_i выступает в качестве правых векторов.

Действительно, поскольку \mathbf{c}_i базис, то, разлагая по этому базису векторы $\mathbf{a}_i = Q_i^j \mathbf{c}_j$, получаем, с учетом свойства (5)

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i = (Q_i^j \mathbf{c}_j) \otimes \mathbf{b}^i = \mathbf{c}_j \otimes (Q_i^j \mathbf{b}^i) = \mathbf{c}_j \otimes \mathbf{d}^j \quad (9)$$

где обозначены векторы $\mathbf{d}^j = Q_i^j \mathbf{b}^i$.

Аналогично, разлагая по базису \mathbf{c}_i векторы $\mathbf{b}^i = Q^{ij} \mathbf{c}_j$, получаем

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i = \mathbf{a}_i \otimes (Q^{ij} \mathbf{c}_j) = (\mathbf{a}_i Q^{ij}) \otimes \mathbf{c}_j = \mathbf{f}^j \otimes \mathbf{c}_j \quad (10)$$

где обозначены векторы $\mathbf{f}^j = \mathbf{a}_i Q^{ij}$.

Формулы (9) и (10) позволяют перейти от представителя $\mathbf{T}_a = \mathbf{a}_i \mathbf{b}^i$ тензора $\mathbf{T} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i$ к другим представителям $\mathbf{T}_d = \mathbf{c}_i \mathbf{d}^i$ и $\mathbf{T}_f = \mathbf{f}^j \mathbf{c}_j$ этого же тензора \mathbf{T} в наперед заданном базисе \mathbf{c}_i .

Программный модуль TensorView позволяет по заданному представителю $\mathbf{T}_a = \mathbf{a}_i \mathbf{b}^i$ тензора $\mathbf{T} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i$ найти и визуализировать другого представителя $\mathbf{T}_d = \mathbf{c}_i \mathbf{d}^i$ этого тензора \mathbf{T} в базисе $\mathbf{c}_i = C_i^j \mathbf{e}_j$ (рисунок 4). Для этого сначала пользователем задается матрица C_i^j пе-

перехода к новому базису \mathbf{c}_i (т.е. базисные координаты базисных векторов \mathbf{c}_i в базисе \mathbf{e}_j), а затем модуль вычисляет но-

вого представителя $\mathbf{T}_d = \mathbf{c}_i \mathbf{d}^i$ тензора и визуализирует его.

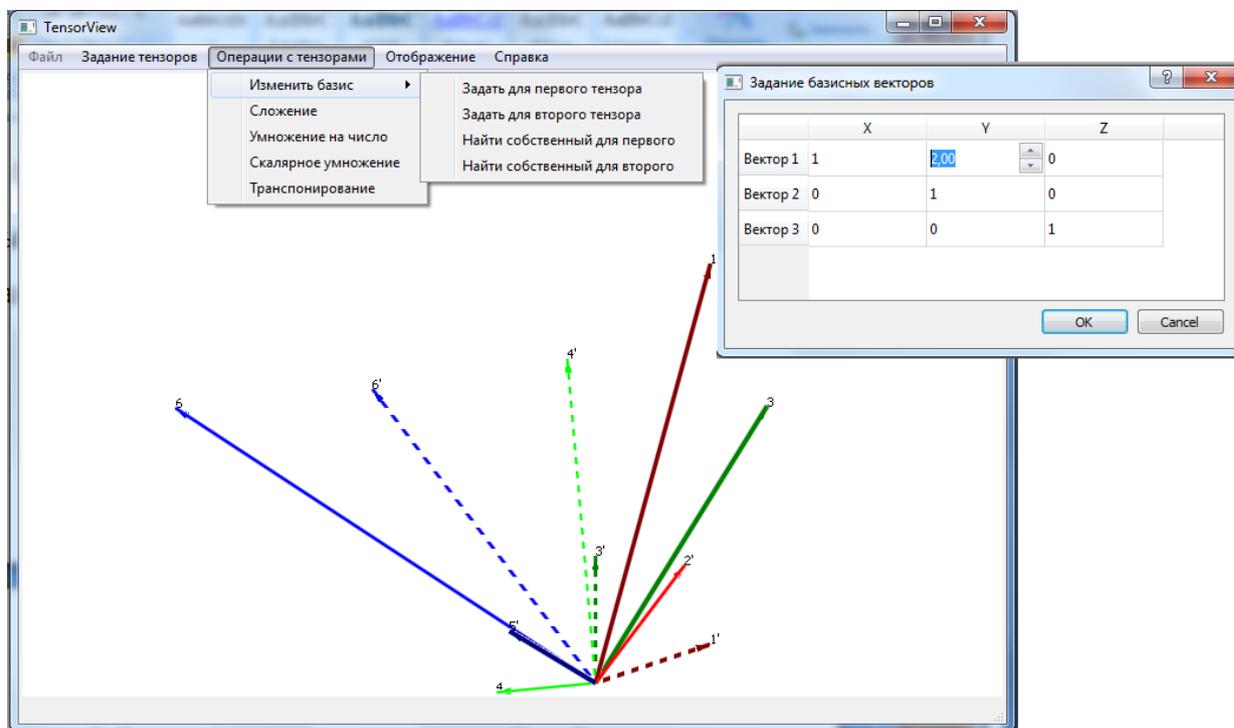


Рисунок 4. Нахождение и визуализация представителя $\mathbf{T}_d = \mathbf{c}_i \mathbf{d}^i$ тензора $\mathbf{T} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i$ в новом базисе (новый представитель \mathbf{T}_d показан пунктирными стрелками)

б) Визуализация сложения двух тензоров

Для того, чтобы визуализировать операцию сложения двух тензоров $\mathbf{T} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i$ и $\mathbf{R} = \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{n}^i$, заданных своими представителями $\mathbf{T}_a = \mathbf{a}_i \mathbf{b}^i$ и $\mathbf{R}_m = \mathbf{m}_i \mathbf{n}^i$, необходимо совершить 2 этапа:

- первый: перейти к новым представителям \mathbf{T}_d и \mathbf{R}_q тензоров \mathbf{T} и \mathbf{R} в одном и том же базисе \mathbf{c}_j с помощью операции (9)

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i = \mathbf{c}_j \otimes \mathbf{d}^j, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{n}^i = \mathbf{c}_j \otimes \mathbf{q}^j \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{d}^j = Q_i^j \mathbf{b}^i$, $\mathbf{q}^j = P_i^j \mathbf{n}^i$, а Q_i^j и P_i^j - матрицы разложения \mathbf{a}_i и \mathbf{m}_i по базису \mathbf{c}_j ($\mathbf{a}_i = Q_i^j \mathbf{c}_j$, $\mathbf{m}_i = P_i^j \mathbf{c}_j$), тогда находим этих представителей тензоров

$$\mathbf{T}_d = \mathbf{c}_j \mathbf{d}^j, \quad \mathbf{R}_q = \mathbf{c}_j \mathbf{q}^j \quad (12)$$

- второй: сложить два новых представителя \mathbf{T}_d и \mathbf{R}_q тензоров, используя правило параллелограмма для сложения правых векторов \mathbf{d}^j и \mathbf{q}^j этих новых представителей

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_d + \mathbf{R}_q &= \mathbf{c}_j \mathbf{d}^j + \mathbf{c}_j \mathbf{q}^j = \mathbf{c}_j \mathbf{r}^j \\ \mathbf{r}^i &= \mathbf{d}^i + \mathbf{q}^i \end{aligned} \quad (13)$$

Суммой двух тензоров \mathbf{T} и \mathbf{R} является класс эквивалентности вычисленного представителя тензора $\mathbf{T}_d + \mathbf{R}_q$

$$\mathbf{T} + \mathbf{R} = [\mathbf{T}_d + \mathbf{R}_q] = [\mathbf{c}_j \mathbf{r}^j] \quad (14)$$

Эту же формулу с учетом диадного произведения (1) и (11) можно переписать так

$$\mathbf{T} + \mathbf{R} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i + \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{n}^i = \mathbf{c}_j \otimes \mathbf{d}^j + \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{q}^i = \mathbf{c}_j \otimes \mathbf{r}^j \quad (15)$$

При визуализации операции сложения тензоров используется формула (13), поскольку, как было отмечено, визуализировать можно лишь отдельных представителей тензора.

Совершенно аналогично, для операции сложения можно использовать представителей тензоров в правом базисе.

Тогда первый этап - переход к новым представителям \mathbf{T}_f и \mathbf{R}_p тензоров \mathbf{T} и \mathbf{R} вместо (11) и (12) содержит следующие формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}^i = \mathbf{f}^j \otimes \mathbf{c}_j, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{n}^i = \mathbf{p}^j \otimes \mathbf{c}_j \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{T}_f = \mathbf{f}^j \mathbf{c}_j \quad \text{и} \quad \mathbf{R}_p = \mathbf{p}^j \mathbf{c}_j \quad (17)$$

где $\mathbf{f}^j = Q^{ji} \mathbf{a}_i$, $\mathbf{p}^j = P^{ji} \mathbf{m}_i$, а Q^{ji} и P^{ji} - матрицы разложения векторов \mathbf{b}^i и \mathbf{n}^i по базису \mathbf{c}_i ($\mathbf{b}^i = Q^{ji} \mathbf{c}_j$ и $\mathbf{n}^i = P^{ji} \mathbf{c}_j$).

Второй этап - сложение новых представителей тензоров, используя правило параллелограмма для сложения левых векторов \mathbf{f}^j и \mathbf{p}^j этих новых представителей, состоит в следующем:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_f + \mathbf{R}_p &= \mathbf{f}^j \mathbf{c}_j + \mathbf{p}^j \mathbf{c}_j = \mathbf{w}^j \mathbf{c}_j, \\ \mathbf{w}^j &= \mathbf{f}^j + \mathbf{p}^j \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mathbf{T} + \mathbf{R} = [\mathbf{T}_f + \mathbf{R}_p] = [\mathbf{w}^j \mathbf{c}_j] = \mathbf{w}^j \otimes \mathbf{c}_j, \quad (19)$$

Представители $\mathbf{T}_d + \mathbf{R}_q$ и $\mathbf{T}_f + \mathbf{R}_p$ тензора $\mathbf{T} + \mathbf{R}$, полученные помощью формул (13) и (18), различаются, но классы их эквивалентности совпадают (то есть они соответствуют одному и тому же тензору $\mathbf{T} + \mathbf{R}$), в чем можно убедиться непосредственно, выражая в формулах

$$\mathbf{w}^j = \mathbf{f}^j + \mathbf{p}^j = Q^{ji} \mathbf{a}_i + P^{ji} \mathbf{m}_i = (Q^{ji} Q_i^k + P^{ji} P_i^k) \mathbf{c}_k \quad (20)$$

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{d}^i + \mathbf{q}^i = Q_i^j \mathbf{b}^j + P_i^j \mathbf{n}^j = (Q_i^j Q^{ki} + P_i^j P^{ki}) \mathbf{c}_k \quad (21)$$

Подставляя (20) и (21) в (15) и (19), получаем, что оба эти выражения совпадают

$$\mathbf{T} + \mathbf{R} = \mathbf{c}_j \otimes \mathbf{r}^j = \mathbf{w}^j \otimes \mathbf{c}_j = (Q^{ji} Q_i^k + P^{ji} P_i^k) \mathbf{c}_k \otimes \mathbf{c}_j \quad (22)$$

Визуализация представителя $\mathbf{c}_i \mathbf{r}^i$ тензора $\mathbf{T} + \mathbf{R}$, представляющего собой сумму представителей \mathbf{T}_d и \mathbf{R}_q двух тензоров \mathbf{T}, \mathbf{R} , показана на рисунке 5 с помощью средств программного модуля TensorView.

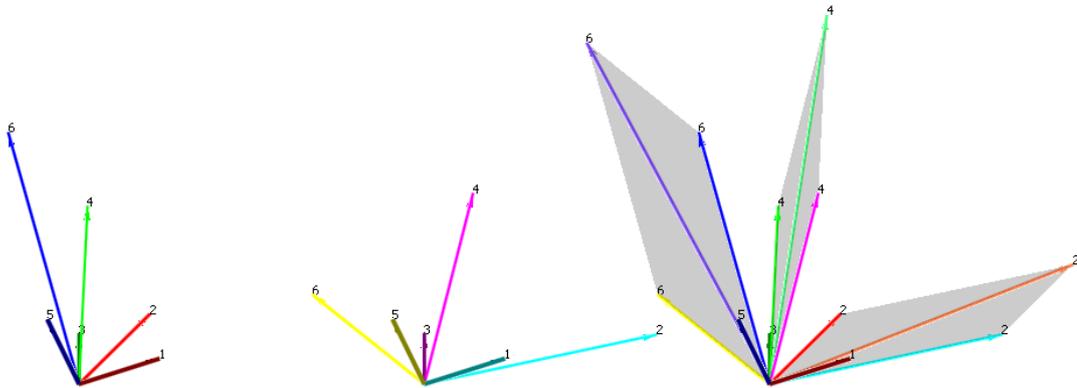


Рисунок 5. Визуализация операции сложения двух тензоров, с помощью перехода к представителям тензоров в новом базисе

6. Визуализация тензорных полей в механике деформируемого твердого тела

В механике деформируемого твердого тела ключевую роль играет тензор напряжений Коши σ , который, согласно [2] может быть представлен с помощью ГПТ следующим образом:

$$\sigma = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{t}^i \quad (23)$$

где \mathbf{t}^i - векторы напряжений, действующие на элементарных координатных площадках, ортогональных к векторам ортонормированного базиса \mathbf{e}_i . Таким образом, в качестве левых векторов для тензора напряжений могут быть выбраны векторы базиса \mathbf{e}_i , а в качестве правых векторов – векторы напряжений \mathbf{t}^i .

Поле тензора напряжений $\sigma(x^k)$ представляет собой тензорнозначную функцию, отображающую некоторую область V 3-х мерного пространства E_3 в область V_σ пространства $T_2(V_3)$ тензоров 2-го ранга

$$\sigma(x^k): V \subset E_3 \rightarrow V_\sigma \subset T_2(V_3) \quad (24)$$

При 3D визуализации тензорного поля создается сетка V_h - множество точек $x_{(j)}^k$ в пространстве E_3 , в каждой из которых генерируется тензор $\sigma(x_{(j)}^k)$. Поскольку векторы ортонормированного декартова базиса \mathbf{e}_i не зависят от точек пространства, то, используя представление (23), получаем

$$\sigma(x_{(j)}^k) = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{t}^i(x_{(j)}^k), \quad (25)$$

где $\mathbf{t}^i(x_{(j)}^k)$ - векторы напряжений в точках сетки V_h .

Таким образом, визуализация тензорного поля в 3D евклидовом пространстве может быть осуществлена с помощью наборов только 3-х правых векторов. Левые векторы \mathbf{e}_i , в силу того, что они одинаковы в каждой точке, для визуализации не информативны и их можно не использовать. Этот способ реализован в программном модуле TENSORVIEW.

Поле тензора напряжений $\sigma(x^i)$ в деформируемом твердом теле вычисляется с помощью решения задачи механики деформируемого твердого тела, которая для случая малых деформаций, квазистатических процессов нагружения и упруго-пластических свойств среды, имеет следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma &= 0, \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \nabla \otimes \mathbf{u}^T), \\ \sigma &= \mathbf{F}(\varepsilon), \\ \sigma \Big|_{\Sigma_1} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{S}(t), \quad \mathbf{u} \Big|_{\Sigma_2} = \mathbf{u}^e(t), \end{aligned} \quad (26)$$

здесь обозначены: ∇ - набл-оператор [9], σ - тензор напряжений, ε - тензор малых деформаций, \mathbf{u} - вектор перемещений, $\mathbf{S}(t)$ - вектор внешних усилий на части границы Σ_1 , $\mathbf{u}^e(t)$ - вектор заданных перемещений на части границы Σ_2 , \mathbf{n} - вектор внешней нормали, $\mathbf{F}(\varepsilon)$ - нелинейная тензорная функция, описывающая упруго-пластические свойства материала [11,12].

Для численного решения задачи (26) в трехмерной постановке используем метод конечного элемента [12]. Этот метод является наиболее эффективным для решения квазистатических задач и реализован во многих программных комплексах, в том числе в коммерческих, таких как ANSYS, MSC Nastran, ABAQUS и др. Для решения задач механики деформируемого твердого тела (26), в том числе для композиционных материалов, в Научно-образовательном центре «СИМПЛЕКС» МГТУ

им.Н.Э.Баумана разработан программный комплекс SIMPLEX, написанный на языке C++, который и использовался в данной работе.

Рассмотрим в качестве примера задачу о растяжении прямоугольной пластины из алюминиевого сплава с отверстием (рис. 6). Эта задача актуальна для проблем исследования сопротивления деформациям элементов крепления конструкций летательных аппаратов [12]. Граничные условия в этой задаче выбираются следующим образом: часть

торцевой поверхности $\Sigma_{2,1}$ полагаем жестко заземленной, на ней заданы нулевые перемещения $\mathbf{u}|_{\Sigma_{2,1}} = 0$, на части $\Sigma_{2,2}$ поверхности тела, представляющей собой половину поверхности отверстия пластины, задана одна ненулевая компонента перемещений, направленная по оси Ox_1 ,

$$\Sigma_{2,2}: u_1^e = U(t) = \dot{U}_0 t, \quad u_2^e = u_3^e = 0 \quad (27)$$

Задаваемое перемещение $U(t)$ изменяется по линейному закону во времени (постоянная скорость нагружения \dot{U}_0 в "жестком режиме").

Остальные части поверхности пластины Σ_1 полагались свободными от нагрузок

$$\Sigma_1: \boldsymbol{\sigma}|_{\Sigma_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{S}(t) = 0. \quad (28)$$

Свойства упруго-пластического материала, а также особенности численного решения задачи (26) с помощью ПК SIMPLEX изложены в работе [12]. В данной статье рассмотрим особенности визуализации результатов расчетов этой задачи с помощью традиционного способа визуализации тензорных полей – покомпонентно, и с помощью нового способа визуализации на основе геометрического представления тензоров.

Классическая покомпонентная 3D визуализация тензорных полей осуществлялась с помощью программного модуля NETGAZER, также разработанного в Научно-образовательном центре

«СИМПЛЕКС» МГТУ им.Н.Э.Баумана [6]. Модуль написан на языке C++ с использованием библиотек OpenGL.

При расчетах и визуализации использовались 2 типа КЭ сеток – относительно мелкая (25088 узлов в КЭ сетке) и крупная (2834 КЭ узла). Тип КЭ – был одинаков – 4-х узловой тетраэдр. Сетки для рассматриваемой области показаны на рис 1. Различие в точности решения, которое было получено на обеих сетках, составляло не более 15%, что было приемлемым для данного модельного класса задач. Более крупная сетка позволяет более наглядно продемонстрировать результаты решения в образовательных целях, когда требуется достаточно просто увидеть тензорные поля без сильно-го масштабирования 3D картинки.

На рисунке 7 показана визуализация тензорного поля напряжений в пластине, полученного методом МКЭ, с использованием классического покомпонентного способа, а на рисунке 8 - показана визуализация того же самого расчетного тензорного поля напряжений с помощью ГПТ. При таком способе для получения информации о 6 компонентах тензора напряжений требуется 6 отдельных рисунков, причем информативность каждого относительно невелика – можно лишь увидеть зоны, где реализуются максимальные и минимальные значения каждой компоненты тензора напряжений в отдельности, однако для того, чтобы понять картину распределения поля напряжений тензора напряжений как цельного объекта необходимо совместить все эти скалярные поля, что представляет собой достаточно сложную задачу.

На рисунках 8 и 9 показана визуализация поля тензора напряжений в задаче о растяжении пластины с отверстием с использованием ГПТ для 2-х значений растягивающего перемещения $U(t_1)$ и $U(t_2)$. Значение перемещения $U(t_2)$ соответствует началу разрушения материала пластины, а перемещение $U(t_1)$ составляет 0,1 от $U(t_2)$. Способ визуализации поля тензора напряжений с исполь-

зованием ГПТ позволяет в рамках одной картины сразу непосредственно отобразить распределение тензоры напряжений как цельного объекта. Необходимости совмещения отдельных картин компонент при этом не возникает. В каждой точке $x_{(j)}^k$ пространства можно увидеть и проанализировать тензор напряжений как совокупность 3-х векторов напряжений $\mathbf{t}^i(x_{(j)}^k)$ на координатных площадках, что является не только более удобным инструментом для анализа, но и открывает новые возможности для понимания тензора как цельного инвариантного объекта. Например, сравнивая, поля тензора напряжений на рисунках 8 и 9 можно увидеть, что на поверхности отверстия тензор напряжений скачкообразно меняет значения

вектора напряжений $\mathbf{t}^1(x_{(j)}^k)$, отображаемого красным цветом. Скачок вызван сменой граничного условия на поверхности контакта: на той части $\Sigma_{2,2}$, где задано перемещение, вектор напряжений $\mathbf{t}^1(x_{(j)}^k)$ направлен в отрицательную сторону от координатной оси Ox^1 , что соответствует отрицательным (сжимающим) напряжениям $\sigma_{11}(x_{(j)}^k)$, а на свободной от нагрузок части поверхности отверстия вектор напряжений направлен в сторону положительных значений координатной оси Ox^1 , что соответствует положительным (растягивающим) напряжениям $\sigma_{11}(x_{(j)}^k)$.

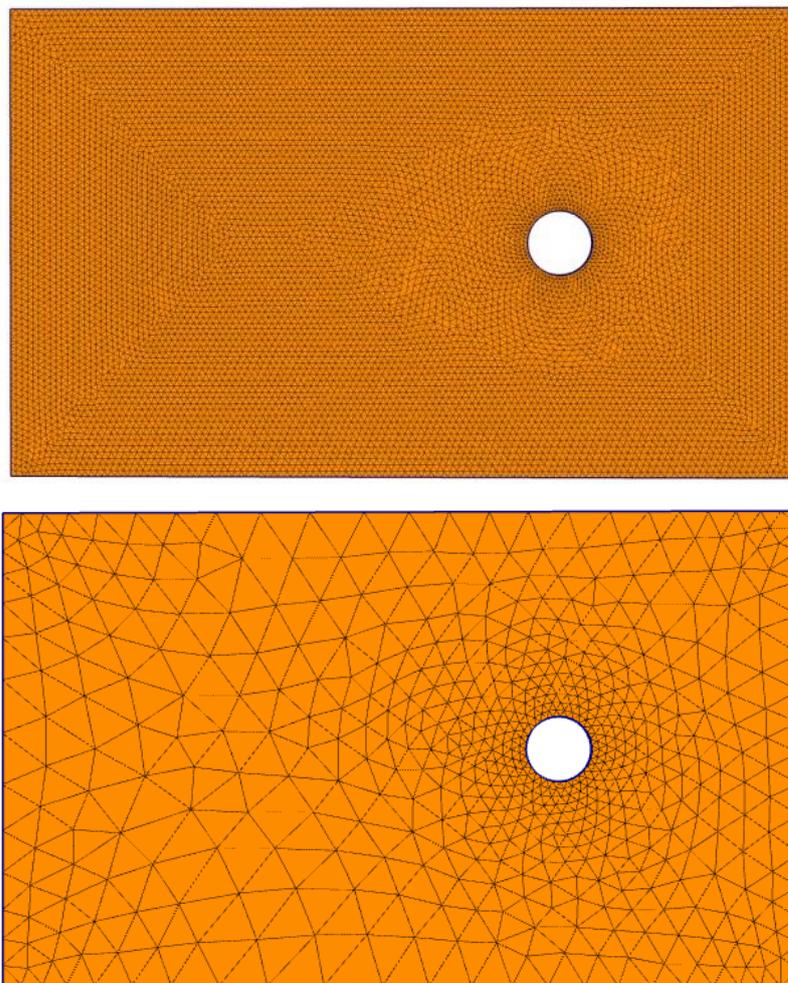
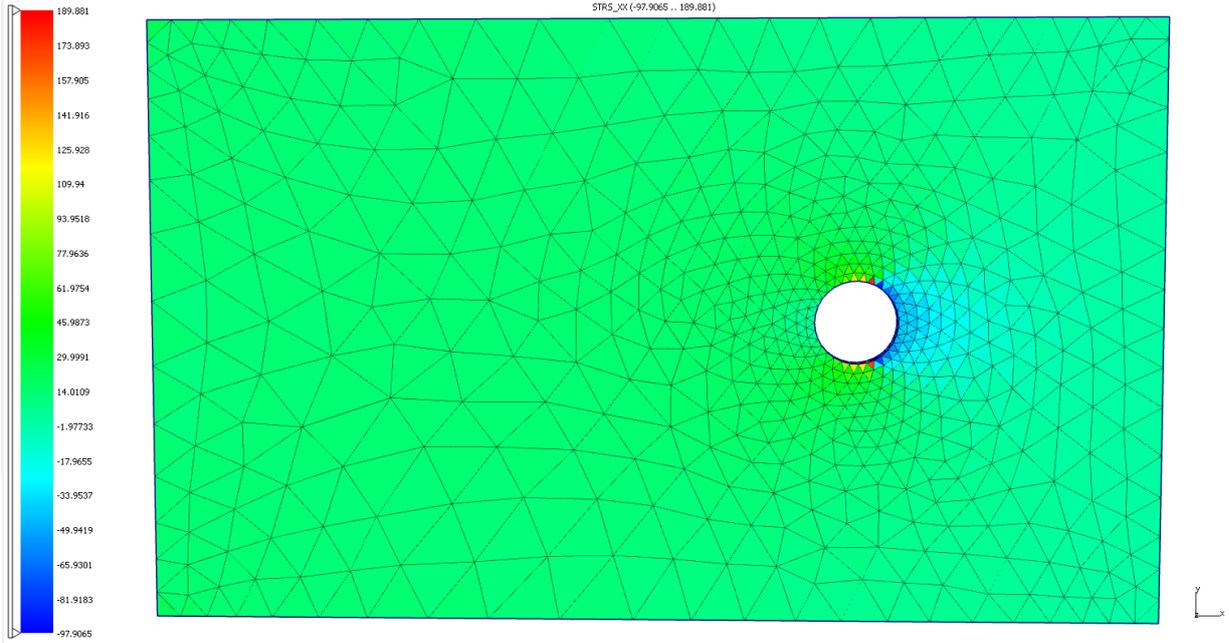
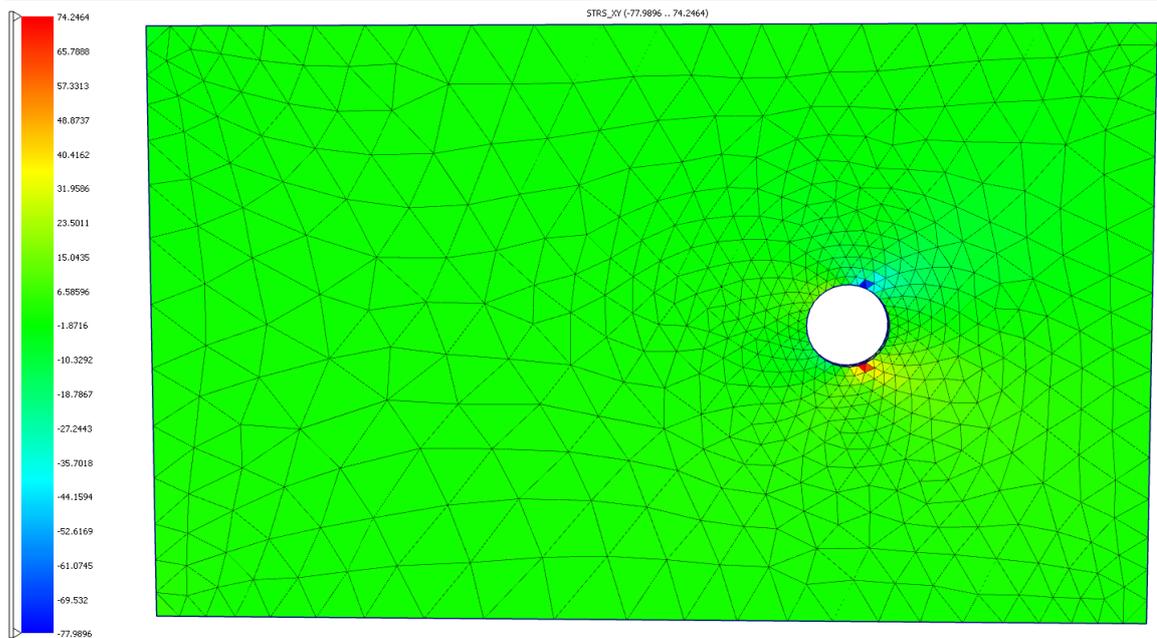


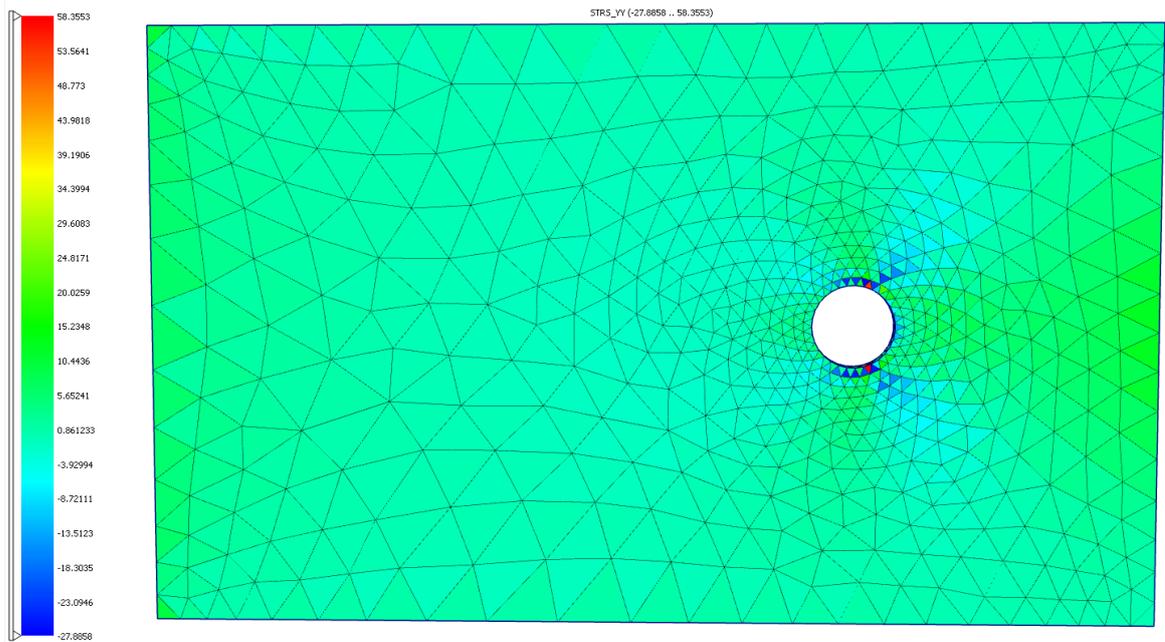
Рисунок 6. КЭ сетки, использованные для расчетов поля тензора напряжений в пластине с отверстием



a)

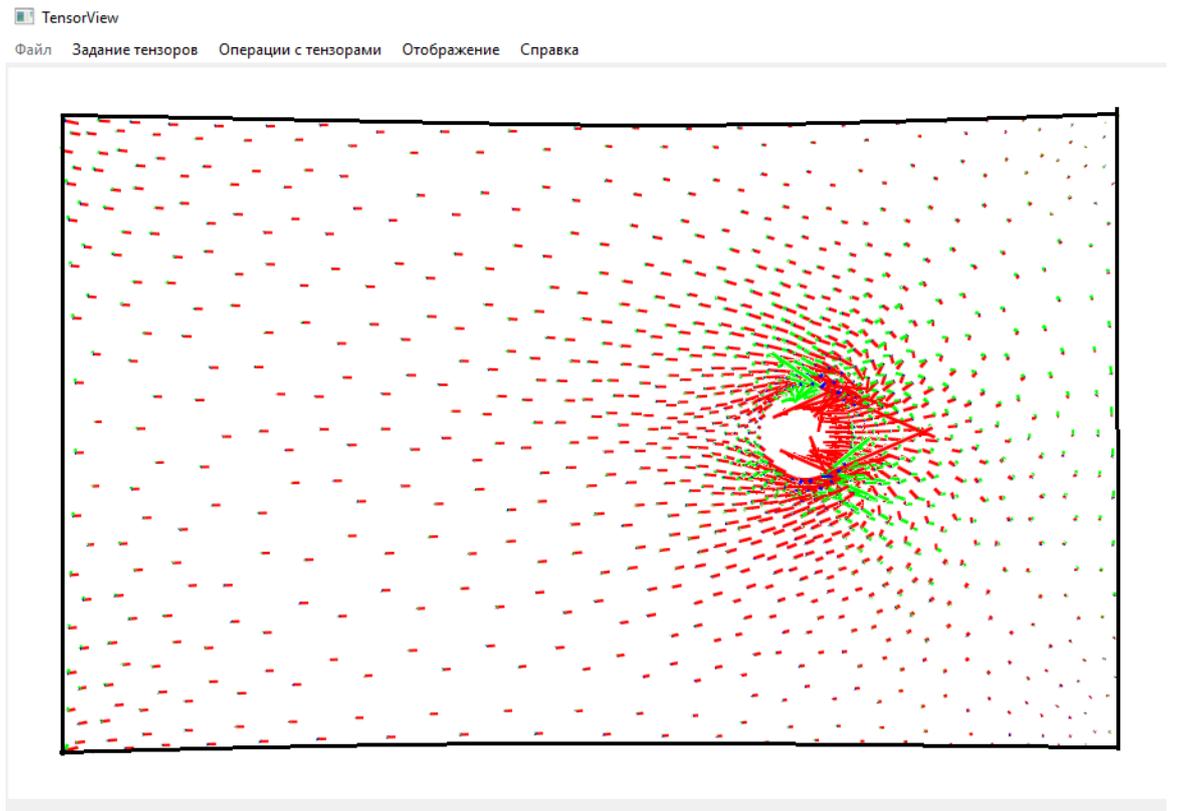


б)

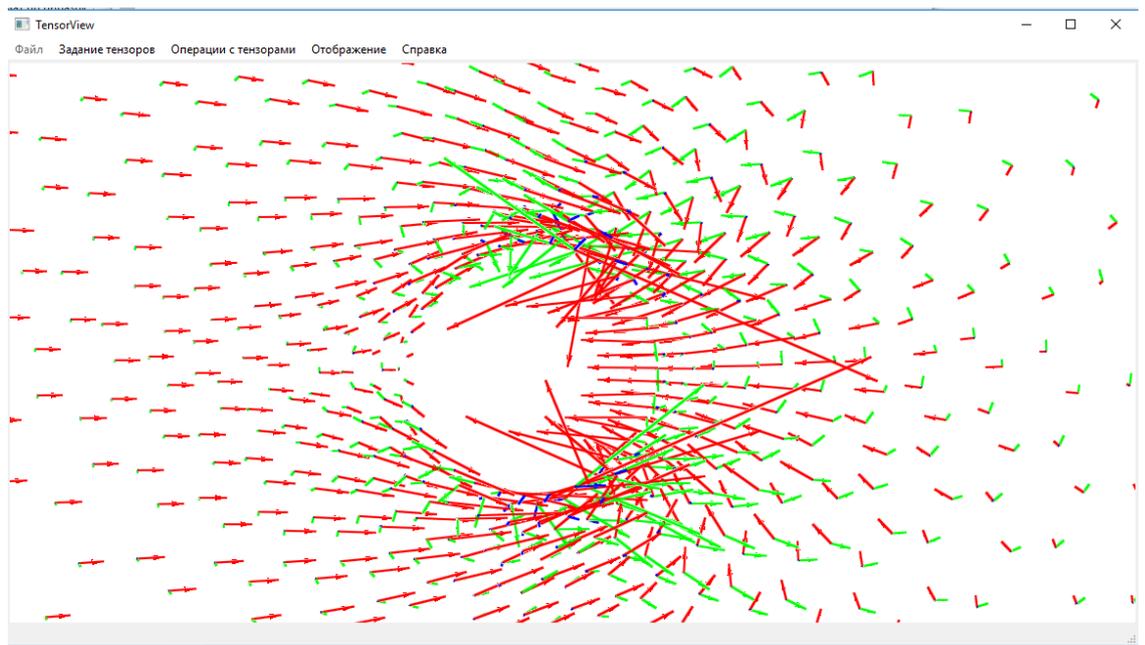


в)

Рисунок 7. Покомпонентная визуализация поля тензора напряжений в задаче о растяжении пластины с отверстием: а) компонента σ_{11} (МПа), б) компонента σ_{12} (МПа), в) компонента σ_{22} (МПа)

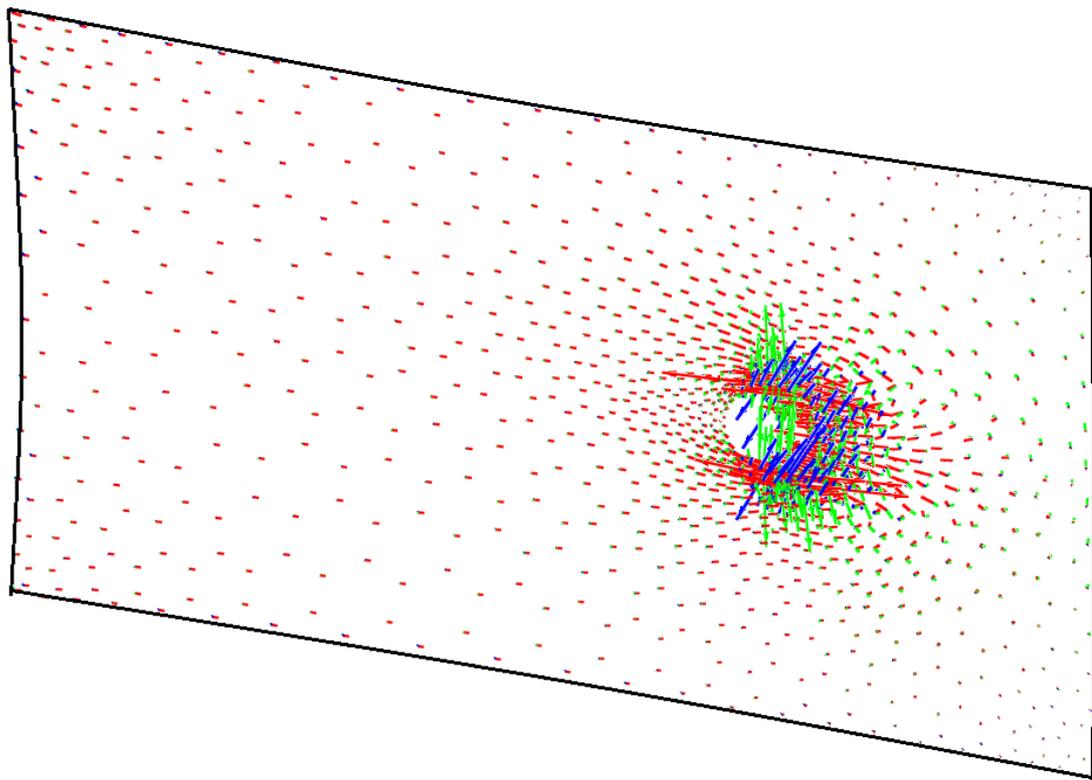


а)

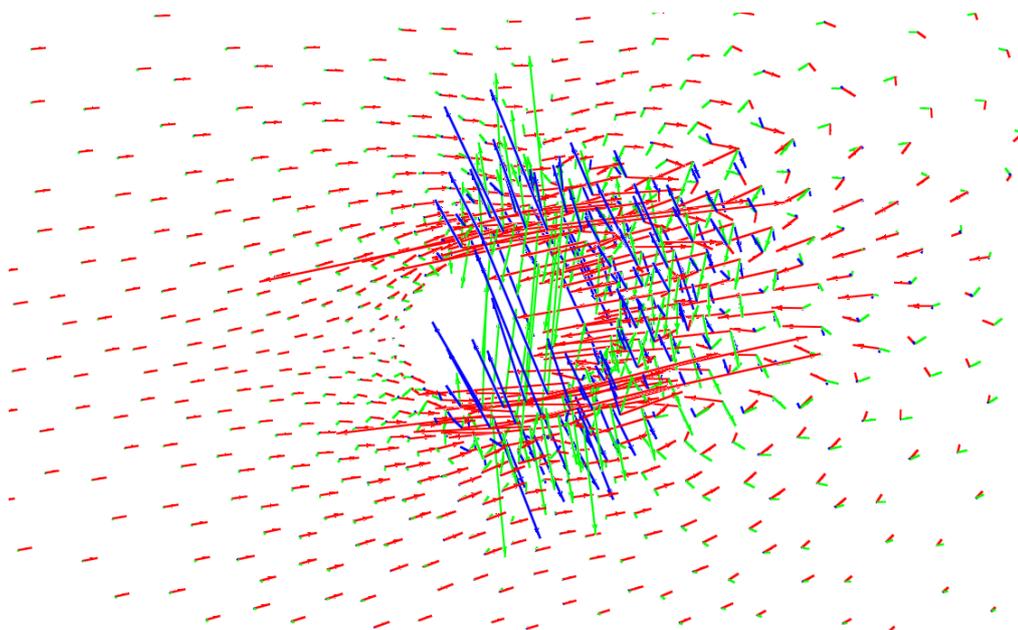


б)

Рисунок 8. Визуализация поля тензора напряжений в задаче о растяжении пластины с отверстием с использованием ГПТ для значения перемещений $U(t_1)$ а) общая картина поля тензора напряжений, б) поле тензора напряжений в локальной зоне в окрестности отверстия



а)



б)

Рисунок 9. Визуализация поля тензора напряжений в задаче о растяжении пластины с отверстием с использованием ГПТ для значения перемещений $U(t_2)$ скорости
 а) общая картина поля тензора напряжений, б) поле тензора напряжений в локальной зоне в окрестности отверстия

7. Заключение

Разработан новый метод визуализации тензорных полей, как в двумерном, так и в трехмерном пространстве, который использует так называемое геометрическое представление тензоров 2-го ранга, в виде упорядоченной совокупности 4 или 6 векторов, соответственно.

Разработан специализированный программный модуль TensorView, который позволяет визуализировать тензорные поля с использованием ГПТ.

Приведены примеры использования визуализации тензорных полей в задаче о моделировании напряженно-деформированного состояния элементов авиационных конструкций. Показано, что предложенный принципиально новый метод визуализации тензорных полей позволяет дать представление о тензорах, как о цельных инвариантных объектах, обобщая при этом хорошо известные представления о векторных полях в трехмерном пространстве.

Список используемой литературы

1. Димитриенко Ю.И. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды /Механика сплошной среды.Т.2. Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 2011. 560 с.
2. В.В. Осипенко, А.М. Пузырев, Г.А. Тумашик, Реализация метода конечных элементов в исследованиях прочности и несущей способности сложных судовых конструкций. ANSYS Advantage Русская редакция №7 – «Судостроение и проектирование морских сооружений»
<http://www.ansysadvantage.ru/fileadmin/archive/07/ANSYS-ADVANTAGE-Rus-07-03.pdf>
3. C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. International Journal for Numerical Methods in Engineering 79(11), pp. 1309-1331, 2009.

4. Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния горных пород с учетом ползучести// Математическое моделирование и численные методы. № 3.-2015 г. с.101-118.
5. Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Сыздыков Е.К. Развитие метода ленточных адаптивных сеток на основе схем TVD для решения задач газовой динамики. Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2011. № 2. С. 87-97.
6. Димитриенко Ю.И.,Сборщиков С.В. Программа Microyes_NetGazer для трехмерной визуализации и анимации результатов решения задачи имитационного моделирования микроразрушения композиционных материалов при статических нагрузках, на основе конечно-элементного решения задач на ячейке периодичности. Программа для электронных вычислительных машин (программы для ЭВМ) Россия № 2015615102 дата поступления 12.03.2015, дата гос-регистрации Программ для ЭВМ 07.05.2015
7. Heidbach O., Reinesker J., Tingay M., Muller B., Sperener B., Fuchs K., Wenzel F. Plate boundary forces are not enough: Second- and third-order stress pattern highlighted in the World Stress Map database // Tectonics. 2007. V. 26 (TC6014). Doi: 10.1029/2007/TC002133.
8. Коптев А.И., Ершов А.В., Маловичко Е.А. Интерполяция и экстраполяция данных «мировой карты напряжений» // Материалы второй молодежной тектонофизической школы-семинара, 17-21 октября 2011 г., г. Москва. 2011. М.: ИФЗ РАН. С. 130-138
9. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высшая школа. 2001.463 с.
10. Димитриенко Ю.И. Тензорный анализ/ Механика сплошной среды.Т.1. Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 2011.463 с.
11. Димитриенко Ю. И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упруго-пластических композитов с учетом повреждаемости// Математическое моделирование и численные методы, 2016, №2 (10), с. 3-24
12. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Численное моделирование и экспериментальное исследование деформирования упруго-пластических пластин при смятии// Математическое моделирование и численные методы. № 1. 2015 г. с.67-82.