

# Компьютерная визуализация кривой второго порядка, проходящей через мнимые точки и касающейся мнимых прямых

В.А. Короткий

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

ORCID: 0000-0002-5266-4701, [Ospolina@mail.ru](mailto:Ospolina@mail.ru)

## Аннотация

Предложены алгоритмы графического компьютерного моделирования кривых второго порядка, заданных мнимыми точками и касательными. Разработан комплекс программных средств геометрически точного построения метрики (главных осей, асимптот, фокусов) и последующей визуализации конических сечений, заданных как действительными, так и мнимыми элементами. Для решения задачи использованы проективно-синтетические геометрические алгоритмы, полностью исключаяющие необходимость выполнения каких-либо алгебраических расчётов. Рассмотрен пример применения разработанных средств визуализации для исследования квадратичного кремонова преобразования, заданного мнимыми фундаментальными точками (F-точками).

**Ключевые слова:** эллиптическая инволюция, гармоническая гомология, мнимые комплексно сопряжённые элементы, бирациональное квадратичное соответствие, инверсия, преобразование Гирста.

## 1. Введение

Мнимые комплексно сопряжённые элементы в алгебре трактуются как корни алгебраических уравнений. В курсе высшей геометрии учение о мнимом распространяется на геометрические образы [1]. Впервые в России тему мнимого в геометрии начал разрабатывать последователь Н.В. Лобачевского, профессор Казанского университета Фёдор Матвеевич Суворов (1845-1911). В работе [2], написанной в 1884 году, он систематически изложил конструктивные методы проективной геометрии, позволяющие выполнять визуальные построения с участием мнимых точек и мнимых прямых. В его работе даны примеры построения кривых второго порядка (КВП) по данным воображаемым (мнимым) точкам и воображаемым (мнимым) касательным.

Советский математик Овсей Аронович Вольберг рассмотрел алгоритм визуализации конического сечения, инцидентного пяти точкам, две или четыре из которых мнимые [3]. Для визуализации используется гармоническая (инво-

люционная) гомология, преобразующая искомую конику в себя. О.А. Вольбергом предложен проективный алгоритм построения коники, заданной действительной точкой, двумя мнимыми точками на прямой  $x$  и полюсом  $X$  прямой  $x$  относительно искомого конического сечения.

В.А. Пеклич рассмотрел “проективно-начертательные” варианты визуализации коники, заданной мнимыми элементами [4]. В построениях используются как проективные инварианты, так и способ выхода в пространство. Такой эклектический подход не является универсальным, но служит полезным упражнением, как в начертательной, так и в проективной геометрии. Конструктивные построения с участием мнимых образов даны в работах [5, 6, 7].

**Цель работы** – составить геометрически точные алгоритмы визуализации кривой второго порядка, заданной смешанным набором действительных и мнимых элементов (точек и касательных). Геометрически точным алгоритмом называют последовательность построений с использованием только двух

графических примитивов – прямой линии и окружности.

**Актуальность работы** обусловлена тем, что в прикладных графических пакетах (Компас, Autocad, CorelDRAW и др.) используются полиномы третьего и более высоких порядков, но не предусмотрена возможность геометрически точного построения КВП, удовлетворяющей заданным (как действительным, так и мнимым) условиям инцидентности. Вследствие этого точная визуализация кривой второго порядка не может быть выполнена стандартным набором средств компьютерной графики.

**Научная новизна.** Полностью решена задача визуализации КВП, заданной любым внутренне непротиворечивым сочетанием действительных и мнимых элементов. В частности, представлен алгоритм построения КВП, инцидентной действительной точке и двум парам мнимых сопряжённых прямых. Решение этой задачи, предложенное в работе [2], не может считаться окончательным, поскольку в нём не предусмотрена возможность построения дополнительной (пятой) точки искомой коники.

**Практическая значимость.** Программное обеспечение САПР, основанное на полиномиальной аппроксимации, предоставляет пользователю возможность построения простейших кривых второго порядка, аффинно эквивалентных окружности. Разработанное автором программное средство “Универсальный компьютерный коникограф” [8, 10] совместно с пакетом графических алгоритмов [9] существенно расширяет возможности компьютерной визуализации процессов, происходящих с участием кривых второго порядка.

## 2. Постановка задачи

Кривая второго порядка  $g$  и произвольная прямая  $v$ , лежащие в одной плоскости, пересекаются в двух действительных или в двух мнимых точках. Через произвольную точку  $V$ , лежащую

в плоскости коники  $g$ , проходят две действительные или две мнимые прямые, касательные к  $g$ . Перечислим все возможные сочетания исходных данных с участием мнимых элементов. С учётом принципа двойственности, всякое сочетание имеет своего двойника, поэтому использована нумерация в виде дроби. Например, задачи 1/1 и 1/2 взаимно двойственны.

1/1. Пять точек, две из которых мнимые.

1/2. Пять касательных, две из которых мнимые.

2/1. Пять точек, четыре из которых мнимые.

2/2. Пять касательных, четыре из которых мнимые.

3/1. Три действительные точки, две мнимые касательные.

3/2. Три действительные касательные, две мнимые точки.

4/1. Одна действительная точка, четыре мнимые касательные.

4/2. Одна действительная касательная, четыре мнимые точки.

5/1. Одна действительная точка, две мнимые точки, две мнимые касательные.

5/2. Одна действительная касательная, две мнимые касательные, две мнимые точки.

6/1. Две действительные точки, одна действительная касательная, две мнимые точки.

6/2. Две действительные касательные, одна действительная точка, две мнимые касательные.

7/1. Одна действительная точка, две действительные касательные, две мнимые точки.

7/2. Одна действительная касательная, две действительные точки, две мнимые касательные.

Требуется выполнить геометрически точную визуализацию кривой второго порядка, заданной любым из вышеперечисленных сочетаний исходных данных. В указатель не включено сочетание, когда на мнимых сопряжённых касательных указаны мнимые точки

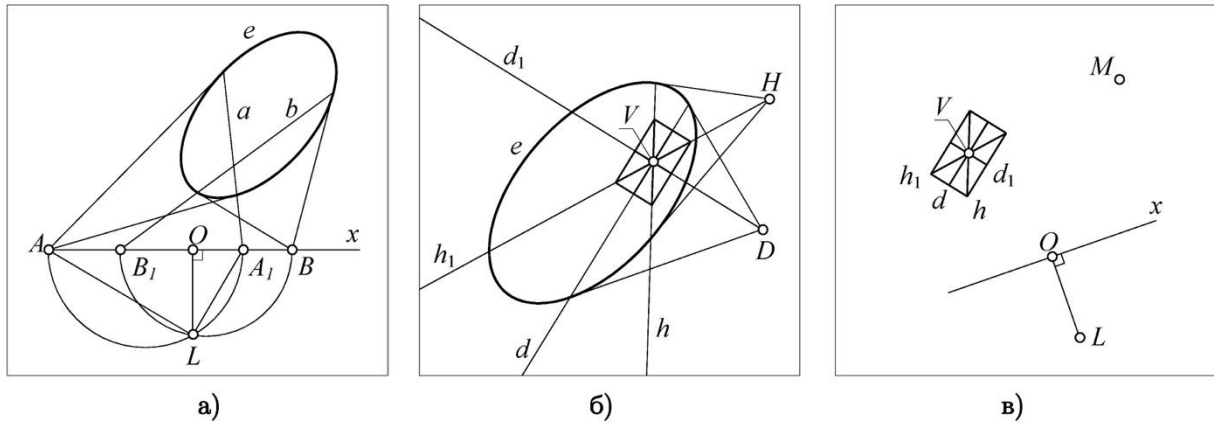


Рисунок 1 – Изображение мнимых элементов: **а** – маркер  $x(O,L)$ ; **б** – марка  $V(h\sim h_1, d\sim d_1)$ ; **в** – коника задана парой мнимых точек  $x(O,L)$ , парой мнимых касательных  $V(h\sim h_1, d\sim d_1)$  и точкой  $M$

прикосновения. Алгоритм визуализации коники для этого случая дан в [2].

### 3. Визуализация мнимых элементов

**Визуализация мнимых точек.** Мнимые точки нельзя изобразить в явном виде. Для их указания используют то обстоятельство, что на любой прямой  $x$ , не пересекающей конику  $e$ , устанавливается эллиптическая инволюция  $\sigma$  ( $A\sim A_1, B\sim B_1$ ) точек, сопряжённых относительно  $e$  (рис. 1, а). Коника  $e$  пересекается с прямой  $x$  в мнимых двойных точках инволюции  $\sigma$ . Инволюция  $\sigma$  на прямой  $x$  может считаться вещественным представителем двойных точек этой инволюции. Две пары соответственных точек  $A\sim A_1, B\sim B_1$  инволюции  $\sigma$  полностью заменяют её мнимые двойные точки при выполнении конструктивных построений. Поэтому для изображения мнимых точек достаточно указать определитель эллиптической инволюции  $\sigma$ . Определитель инволюции может быть задан “маркером”  $x(O, L)$ , состоящим из прямолинейного ряда  $x$  и точки Лагерра  $L$ , из которой инволюция  $\sigma$  проецируется на прямую  $x$  ортогональным пучком прямых. Основание  $O$  перпендикуляра, опущенного из  $L$  на  $x$  – центр инволюции  $\sigma$  (см. рис. 1, а). Маркер  $x(O, L)$  суть визуальное изображение пары комплексно сопряжённых мнимых точек.

**Визуализация мнимых прямых.** Согласно принципу двойственности, ря-

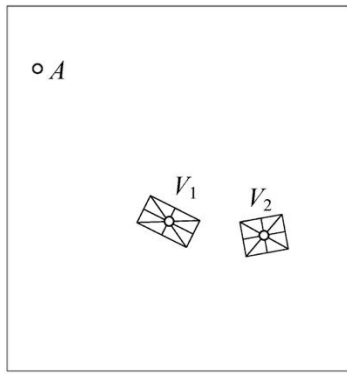
ду точек второго порядка (коническому сечению) двойственно соответствует пучок прямых второго порядка (множество касательных к коническому сечению). Ряд второго порядка содержит как действительные, так и мнимые точки. Пучок прямых второго порядка содержит как действительные, так и мнимые прямые (мнимые касательные к коническому сечению). Заметим, что мнимых точек и мнимых касательных у любой коники на порядок больше, чем действительных точек и касательных.

Произвольная коника  $e$  устанавливает на произвольной прямой инволюцию сопряжённых точек. Двойственным образом, коника  $e$  устанавливает в пучке прямых с вершиной в произвольной точке  $V$  инволюцию сопряжённых прямых: произвольной прямой  $a$  пучка  $V$  соответствует прямая  $a_1$  этого же пучка, проходящая через полюс  $A$  прямой  $a$  в поляритете с ядром  $e$ .

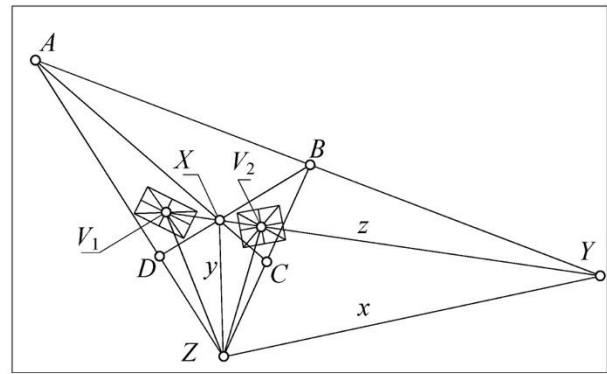
Если точка  $V$  расположена вне коники  $e$ , то в пучке  $V$  устанавливается гиперболическая инволюция с двумя действительными самосопряжёнными прямыми  $u, v$  (действительными касательными к конике  $e$ ). Если точка  $V$  внутри коники – тогда в пучке  $V$  получаем эллиптическую инволюцию  $\rho$  с двумя мнимыми самосопряжёнными прямыми (мнимыми касательными к конике  $e$ ).

Определитель эллиптической инволюции  $\rho$  может считаться визуальным изображением её мнимых самосопря-

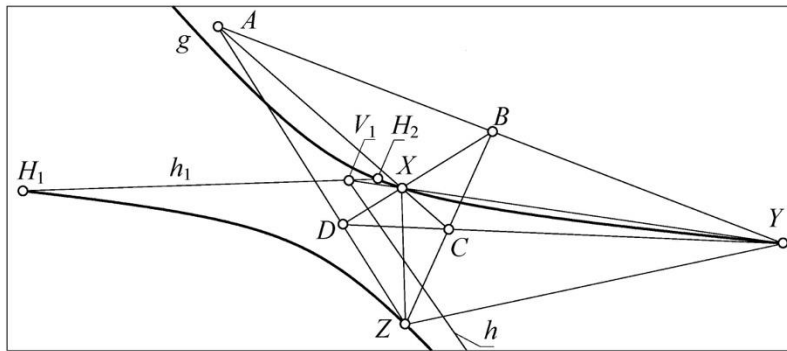




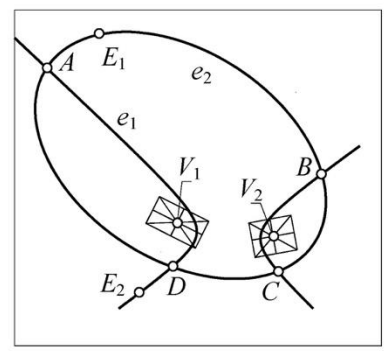
а)



б)



в)



г)

Рисунок 3 – Визуализация коники, касающейся мнимых прямых: **а** – исходные данные (точка  $A$  и две пары мнимых касательных), **б** – автополярный треугольник, **в** – гомалоид прямой  $h$ , **г** – два решения  $e_1, e_2$

гомологии  $\phi$  с центром  $P$ , преобразующей конику  $g$  в себя, должна пройти через точку  $P'$ .

3. Проводим прямые  $P'A$  и  $P'C$ , соответственные в гомологии  $\phi$ . Через центр  $P$  проводим произвольный луч  $i$ , пересекающий соответственные прямые  $P'A$  и  $P'C$  в точках 1 и 2. Точки 1, 2 взаимно соответственны в гомологии  $\phi$ .

4. Прямые  $A_1$  и  $C_2$ , соответственные в  $\phi$ , пересекаются в точке  $Q$ , лежащей на оси  $p$ . Соединяя точки  $P'$  и  $Q$ , получаем ось  $p$  гомологии  $\phi$ . Инволюционная гомология  $\phi$  полностью определена осью  $p$  и центром  $P$ .

5. Находим точку  $D$ , соответственную точке  $B$  в гомологии  $\phi$ . Для этого проводим прямую  $B_2$  до её пересечения с осью  $p$  в точке 3, находим прямую  $1_3$ , соответственную прямой  $B_2$ , и отмечаем точку  $D$  на пересечении луча  $PB$  с прямой  $1_3$ . Действительная точка  $D$  принадлежит искомой конике  $g$ .

Снова выбирая пару действительных точек, принадлежащих конике  $g$  (например,  $A$  и  $B$ ), повторяем действия 1...5 и находим ещё одну действительную (пятую) точку искомой коники. Затем определяем её метрику с помощью [8] и выполняем визуализацию.

## 5. Визуализация коники, инцидентной мнимым прямым

Требуется построить коническое сечение, проходящее через действительную точку  $A$  и касающуюся двух пар мнимых прямых, заданных на чертеже марками  $V_1$  и  $V_2$  (рис. 3, а). Следуя Ф.М. Суворову [2], находим мнимые точки пересечения двух пар мнимых касательных. Эти четыре мнимые точки попарно расположены на двух действительных прямых  $x, y$ , пересекающихся в точке  $Z$ . Пучки  $V_1, V_2$  устанавливаются на прямых

$x$ ,  $y$  тождественно совпадающие инволюции. Точка  $Z$  определяется на пересечении прямых, которые в пучках  $V_1, V_2$  соответствуют прямой  $z=V_1-V_2$ . Несколько сложнее найти прямые  $x, y$ . Конструктивное построение прямых  $x, y$  в работе [2] не предлагается. Такое построение рассмотрено в настоящей статье (рис. 3, б).

Далее в [2] доказывается утверждение, которое в современных терминах формулируется следующим образом. Если в пучках  $V_1, V_2$  заданы инволюции  $\rho_1, \rho_2$ , то прямые  $x, y$ , на которых данные пучки устанавливают тождественные инволюции, являются сторонами автополярного треугольника, общего для всех коник, касательных к двойным прямым инволюций  $\rho_1, \rho_2$ . Третья сторона автополярного треугольника совпадает с прямой  $z$ . Вершины  $X, Y, Z$  и стороны  $x, y, z$  найденного автополярного треугольника образуют три гармонические гомологии, в которых данной точке  $A$  соответствуют точки  $B, C, D$ . Искомое коническое сечение должно проходить через точки  $A, B, C, D$ .

Но коническое сечение определяется пятью точками, а не четырьмя. Как построить недостающую пятую точку искомой коники? Здесь Ф.М. Суворов допустил ошибку. Он предположил, что одна из найденных точек (например, точка  $B$ ) может, в свою очередь, дать новые дополнительные точки искомой коники. Это неверно, потому что все три гомологии, образованные автополярным треугольником, инволюционны. В этих гомологиях точке  $B$  соответствуют точки  $A, C, D$ . Новых точек не возникает.

Таким образом, рассматриваемая задача в работе [2] до конца не доведена. Сохранилась проблема визуализации пятой действительной точки. Для решения этой проблемы подведём промежуточные итоги. Пучки  $V_1, V_2$  порождают треугольник  $XYZ$ , который является автополярным для всех конических сечений, касающихся двойных прямых пучков  $V_1, V_2$ . Кроме того, известны четыре точки  $A, B, C, D$  искомой коники. Это хороший результат, но ещё не решение.

Все конические сечения, проходящие через  $A, B, C, D$ , образуют пучок  $\delta$  кривых второго порядка с общим автополярным треугольником  $XYZ$ . В пучке  $\delta$  есть искомая коника  $e$ , касающаяся мнимых двойных прямых инволюций  $\rho_1, \rho_2$ . Для выделения искомой коники  $e$  из пучка  $\delta$  надо указать какое-нибудь дополнительное условие, которому она должна подчиняться. Например, можно взять пару сопряжённых главных направлений  $h \sim h_1$  в пучке  $V_1$  и учесть, что полюс  $H$  прямой  $h$  относительно искомой коники обязан лежать на  $h_1$ . Начертим гомалоид  $g$  прямой  $h$  в квадратичном кремоновом преобразовании, установленном пучком конических сечений  $\delta(ABCD)$  [11]. Точки  $H_1, H_2$  пересечения гомалоида с прямой  $h_1$  – два возможных полюса прямой  $h$  относительно искомой коники пучка  $\delta$  (рис. 3, в).

Зная, что  $H_1$  и  $h$  – полюс и поляра относительно искомой коники, найдём пятую точку  $E_1$  и получим коническое сечение  $e_1(A, B, C, D, E_1)$ . Это первое решение задачи. Аналогично, зная, что  $H_2$  и  $h$  – полюс и поляра относительно искомой коники, найдём точку  $E_2$  и конику  $e_2(A, B, C, D, E_2)$ . Это второе решение (рис. 3, г).

Кривую второго порядка  $g$  называют девятиточечным коническим сечением четырёхугольника  $ABCD$  относительно прямой  $h$  (см. рис. 3, в). Оно содержит девять особых точек: вершины  $X, Y, Z$  автополярного треугольника, общего для всех коник пучка  $\delta$ , и ещё по одной точке на каждой стороне полного четырёхугольника  $ABCD$  [12].

Заметим, что для решения задачи нет необходимости вычерчивать непрерывный гомалоид  $g$ . Достаточно знать всего пять точек кривой  $g$ , чтобы найти (циркулем и линейкой) необходимые точки  $H_1, H_2$  её пересечения с прямой  $h$ .

## 6. Квадратичное преобразование, заданное мнимыми F-точками

Бирациональные (кремоновы) преобразования представляют собой эф-

фективный аппарат конструирования гладких динамических кривых и двумерных обводов [13]. Простейшим из бирациональных соответствий является квадратичное отображение  $\Omega$  плоских полей друг на друга, которое, согласно Seudevitz (1845 г.), определяется с помощью двух пар проективных пучков прямых с вершинами в фундаментальных точках ( $F$ -точках). Выдающийся русский геометр Константин Алексеевич Андреев (1848-1921) указывает, что такой способ установления квадратичного соответствия распространяется только на те случаи, когда все  $F$ -точки суть действительные [14].

Это утверждение, справедливое для уровня геометрической науки 19 века, на сегодняшний день слишком категорично. Современные методы компьютерной визуализации мнимых геометрических образов позволяют разработать универсальный конструктивный алгоритм построения соответственных точек в квадратичном отображении  $\Omega$ , заданном как действительными, так и мнимыми  $F$ -точками.

Это утверждение, справедливое для уровня геометрической науки 19 века, на сегодняшний день слишком категорично. Современные методы компьютерной визуализации мнимых геометрических образов позволяют разработать универсальный конструктивный алгоритм построения соответственных точек в квадратичном отображении  $\Omega$ , заданном как действительными, так и мнимыми  $F$ -точками.

Пусть квадратичное соответствие  $\Omega$  плоских полей  $\Pi, \Pi'$  задано тремя парами  $F$ -точек и парой соответственных точек  $A \sim A'$ . В поле  $\Pi$  начертим коническое сечение  $e$ , проходящее через  $A, F_1, F_2$ , относительно которого точка  $F_3$  и прямая  $j_3$  являются полюсом и полярой. Такое же коническое сечение  $e'$  начертим в плоскости  $\Pi'$  (рис. 4).

Введём в рассмотрение, наряду с  $\Omega$ , вспомогательное коллинеарное соответствие  $\Delta$  полей  $\Pi, \Pi'$ , в котором четвёрке точек  $F_1, F_2, F_3, A$  поля  $\Pi$  отвечает четвёрка точек  $F'_2, F'_1, F'_3, A'$  поля  $\Pi'$ .

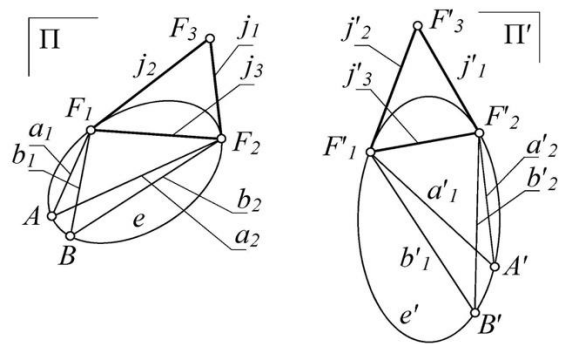


Рисунок 4 – К лемме 1

**Лемма 1.** Квадратичное отображение  $\Omega(F_1F_2F_3A \sim F'_1F'_2F'_3A')$  и коллинеация  $\Delta(F_1F_2F_3A \sim F'_2F'_1F'_3A')$  устанавливают между точками коник  $e$  и  $e'$  одно и то же взаимно однозначное соответствие (за исключением  $F$ -точек). Иными словами, произвольно взятой точке  $B$ , лежащей на конике  $e$ , соответствует в отображениях  $\Omega$  и  $\Delta$  одна и та же точка  $B'$ , инцидентная  $e'$  (см. рис. 4). Доказательство следует из рассмотрения проективитетов, установленных между  $\Pi$  и  $\Pi'$  отображениями  $\Omega$  и  $\Delta$ .

Отметим в  $\Pi$  произвольную точку  $B$  и начертим полный четырёхугольник  $F_1F_2MN$ , вписанный в  $e$  (рис. 5). Диагональные точки  $B, B_1$  полного четырёхугольника  $F_1F_2MN$  сопряжены в поляритете  $e$ .

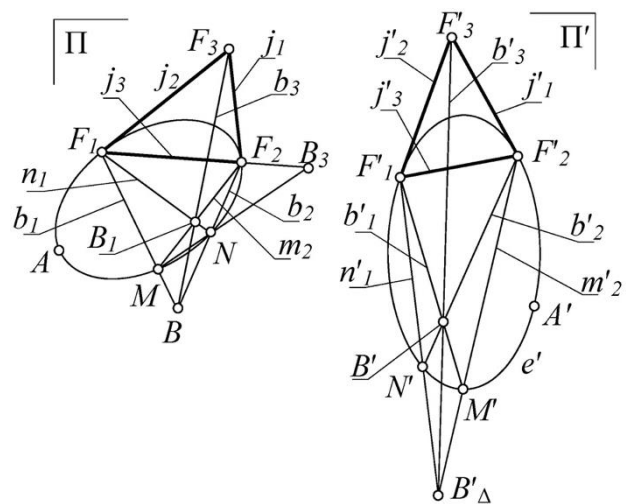


Рисунок 5 – К лемме 2

Найдём в поле  $\Pi'$  точку  $B'_\Delta$ , соответственную точке  $B$  в коллинеации  $\Delta$ , и начертим четырёхугольник  $F'_1F'_2M'N'$ , вписанный в  $e'$ . Диагональные точки  $B'_\Delta, B'$  лежат на одной прямой  $b'_3$ , соот-

ветствуя друг другу в преобразовании Гирста  $\Psi$  с центром в точке  $F'_3$  и инвариантной коникой  $e'$  (см. рис. 5).

**Лемма 2.** Если в проективитете  $\Delta(F_1F_2F_3A \sim F'_1F'_2F'_3A')$  точке  $B$  поля  $\Pi$  соответствует точка  $B'_\Delta$  поля  $\Pi'$ , то в квадратичном соответствии  $\Omega$  точка  $B$  отображается в точку  $B'$ , лежащую на прямой  $b'_3 = F'_3B'_\Delta$  и сопряжённую с точкой  $B'_\Delta$  в поляритете  $e'$ , а точка  $B'_\Delta$  поля  $\Pi'$  квадратично отображается в точку  $B_1$  поля  $\Pi$ , лежащую на  $b_3 = F_3B$  и сопряжённую с точкой  $B$  в поляритете  $e$  (см. рис. 5). Доказательство следует из леммы 1 и из рассмотрения инцидентных элементов преобразования  $\Omega$ .

**Конструктивная реализация.**

Пусть квадратичное соответствие  $\Omega$  полей  $\Pi, \Pi'$  задано парой соответственных точек  $A \sim A'$  и тройками фундаментальных точек  $(F^*_1, F^*_2, F_3) \sim (F'^*_1, F'^*_2, F'_3)$ . Мнимые сопряжённые точки  $F^*_1 \sim F^*_2$  в поле  $\Pi$  заданы эллиптической инволюцией  $\sigma$  на прямой  $j_3$ . Мнимые сопряжённые точки  $F'^*_1 \sim F'^*_2$  в поле  $\Pi'$  заданы эллиптической инволюцией  $\sigma'$  на прямой  $j'_3$ . Инволюции  $\sigma, \sigma'$  заданы точками Лагерра  $L$  и  $L'$  (рис. 6). Требуется построить в поле  $\Pi'$  изображение (гомалоид)  $m'$  произвольной прямой  $m$ , лежащей в плоскости  $\Pi$ .

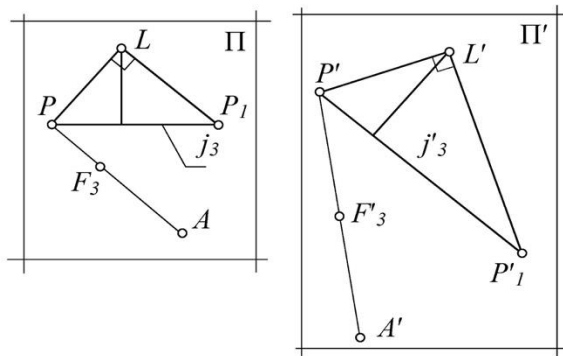


Рисунок 6 – Квадратичное соответствие полей  $\Pi, \Pi'$  (исходные данные)

В плоскости  $\Pi$  вычерчиваем конику  $e$ , проходящую через данную точку  $A$ , через мнимые точки  $F^*_1 \sim F^*_2$  и удовлетворяющую условию: точка  $F_3$  и прямая  $j_3 = F^*_1F^*_2$  – полюс и поляра относительно  $e$  (см. “Основной алгоритм”, п. 4). Выполняя на плоскости  $\Pi'$  такое же построение, получаем конику  $e'$  (рис. 7).

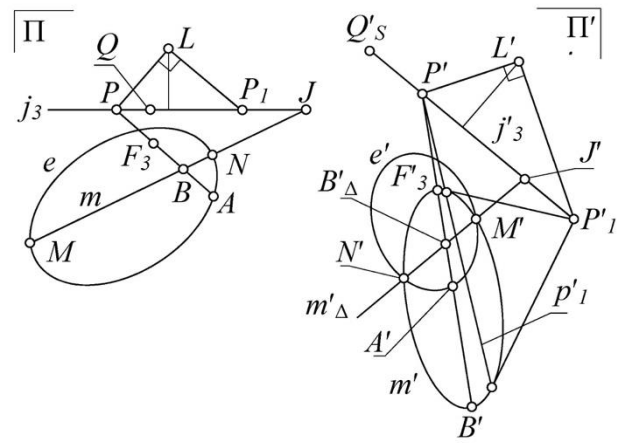


Рисунок 7 – Построение гомалоида  $m'$

На прямых  $j_3$  и  $j'_3$  находим дополнительные действительные точки  $P_1 \sim P'_1, Q \sim Q's$ , соответственные в проективитете  $\Delta_1$  – первом из двух возможных проективитетов  $\Delta$ . Произвольной прямой  $m$  поля  $\Pi$  соответствует в  $\Delta_1$  прямая  $m'_\Delta$ , проходящая через точку  $J'$ , найденную из условия равенства гармонических четвёрок  $(PP_1QJ) = (P'P'_1Q'sJ')$ , где  $J = m \cap j_3$ . Проективное соответствие  $\Delta_1$  вполне определено четвёрками неколлинеарных точек  $(A, F_3, Q, P_1) \sim (A', F'_3, Q's, P'_1)$ .

Согласно лемме 1, в квадратичном соответствии  $\Omega$  (как и в линейном соответствии  $\Delta_1$ ) точкам  $M, N$  пересечения прямой  $m$  и коники  $e$  соответствуют в поле  $\Pi'$  точки  $M', N'$  пересечения прямой  $m'_\Delta$  и коники  $e'$ . Следовательно, гомалоид  $m'$  прямой  $m$  должен пройти через точки  $M', N'$  и через фундаментальные точки  $F'^*_1, F'^*_2, F'_3$ .

Для построения дополнительных действительных точек гомалоида  $m'$  используется лемма 2, согласно которой произвольная точка прямой  $m$  переходит в точку гомалоида  $m'$  в результате её линейного отображения  $\Delta$  и последующего преобразования Гирста с центром  $F'_3$  и инвариантной коникой  $e'$ . Например, точке  $B$  поля  $\Pi$  отвечает в  $\Delta$  точка  $B'_\Delta$  поля  $\Pi'$ ; в свою очередь точка  $B'_\Delta$  в преобразовании Гирста с центром  $F'_3$  и инвариантной коникой  $e'$  переходит в точку  $B'$ , соответствующую точке  $B$  поля  $\Pi$  в отображении  $\Omega$ .

Для проверки полученного результата на рис. 7 начерчена поляра  $p'_1$  точки



$P'_1$ . Поляра  $p'_1$  пересекает прямую  $j'_3$  в точке  $P'$ , сопряжённой с точкой  $P'_1$  в инволюции  $\sigma'$ . Это означает, что гомолоид  $m'$  прямой  $m$  устанавливает на  $j'_3$  инволюцию  $\sigma'$ , то есть кривая  $m'$  инцидентна мнимым двойным точкам  $F'^*_1, F'^*_2$  инволюции  $\sigma'$ . Задача решена верно.

**Примечание.** Задача визуализации квадратичного кремонова преобразования, заданного мнимыми  $F$ -точками (см. рис. 6), имеет два решения, что обусловлено неопределённостью порядка взаимного соответствия мнимых двойных точек инволюций  $\sigma, \sigma'$ .

## 7. Приложения к анализу физических явлений

Кривые второго порядка, связанные с фундаментальными законами природы, играют исключительную роль как в физике и математике, так и в прикладных технических задачах. Следует отметить особую значимость визуализации конических сечений, инцидентных мнимым элементам, в вопросах теории поля. Например, процесс распространения волн слабых возмущений от окружности нулевого радиуса  $S$  в области, ограниченной кромками  $v_1, v_2$ , визуализируется как пучок конических сечений с мнимыми базисными точками (рис. 8). Все коники пучка проходят через две пары мнимых сопряжённых точек, заданных маркерами  $v_1(O_1, L_1), v_2(O_2, L_2)$ , и имеют общие полюс  $P$  и поляру  $p$ . В результате получаем наглядную картину деформации концентрического пучка круговых

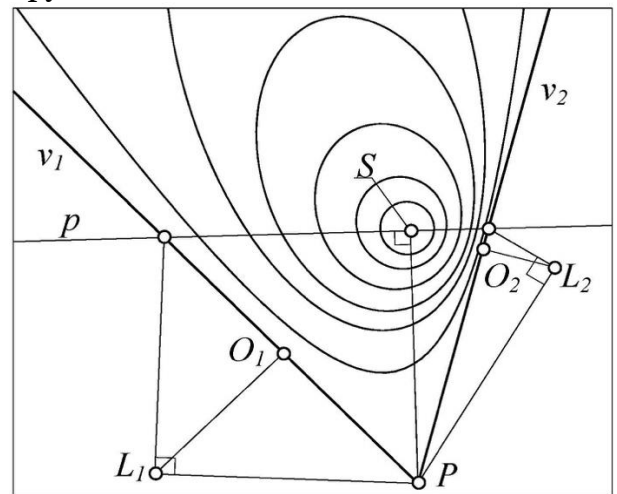


Рисунок 8 – Распространение слабых возмущений

волн (с центром  $S$ ) в упругой среде с прямолинейными граничными кромками  $v_1, v_2$ . Графическое решение, выполненное с использованием предлагаемой методики визуализации мнимых элементов, придаёт наглядность аналитическому решению, основанному на теории функций комплексного переменного.

## 8. Универсальный компьютерный коникограф

Коникограф – механизм для вычерчивания конических сечений. Автором статьи разработано универсальное программное средство – электронный аналог механических устройств, позволяющий вычерчивать кривую второго порядка, инцидентную произвольно указанным на плоскости  $n$  точкам и  $m$  касательным ( $n+m=5$ ).

Отличительная особенность разработанного программного средства состоит в том, что по заданному набору  $n+m=5$  инциденций в первую очередь выполняется не вычерчивание КВП, а геометрически точное построение её метрики (центра, главных осей, асимптот, фокусов). И только после определения метрики вычерчивается непрерывная КВП. Очевидно, если определена метрика КВП, то её последующая визуализация средствами компьютерной графики не представляет затруднений. Рассмотрим геометрически точный алгоритм построения метрики КВП на примере специализации  $n=5, m=0$  (коника задана пятью произвольно указанными точками 1, 2, ..., 5, одна или две из которых могут быть несобственными).

Действие 1 (построение инволюции  $\sigma$  сопряжённых диаметров искомой КВП). Проводим хорды 37 и 46, параллельные хордам 15, 23 (рис. 9). Точки 6, 7, инцидентные искомой КВП, определяем по теореме Паскаля. Через середины найденных хорд проводим диаметры  $a, b$ , пересекающиеся в центре  $O$  искомой КВП. Диаметры  $a', b'$ , сопряжённые диаметрам  $a, b$ , находим из условия  $a' \parallel 15, b' \parallel 23$ . Если сопряжённые пары  $a \sim a', b \sim b'$  не разделены, то инволюция  $\sigma(a \sim a', b \sim b')$  в пучке  $O$  – гиперболическая, а искомая КВП – гипербола (рис. 9, а). Раздельность пар  $a \sim a', b \sim b'$  позволяет классифицировать КВП как эллипс (рис. 9, б).

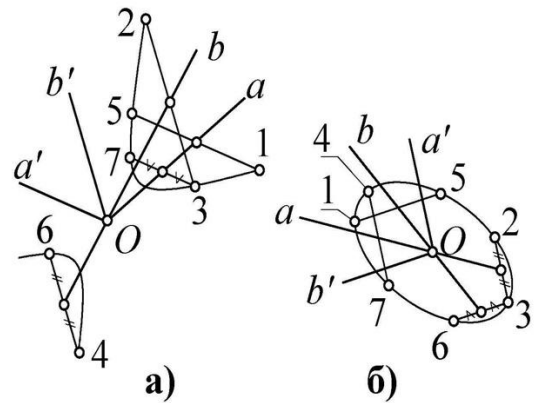


Рисунок 9 – Коникограф, действие 1 (построение инволюции  $a \sim a', b \sim b'$ )

Действие 2 (построение главных диаметров и асимптот). Проецируем инволюцию  $\sigma(a \sim a', b \sim b')$  на конику  $r$  (окружность с центром  $R$ ), инцидентную точке  $O$  (рис. 10). Получаем на  $r$  соответственные точки  $A \sim A', B \sim B'$ , которые определяют гиперболическую (рис. 10, а) или эллиптическую (рис. 10, б) инволюцию. Отмечаем центр инволюции  $S = AA' \cap BB'$ . Луч  $RS$  высекает на  $r$  точки  $D, D'$ . Взаимно перпендикулярные прямые  $d = OD, d' = OD'$  указывают главные диаметры искомой КВП. Асимптоты гиперболы проходят через точки пересечения  $E_1, E_2$  оси  $s$  инволюции  $\sigma$  с коникой  $r$ .

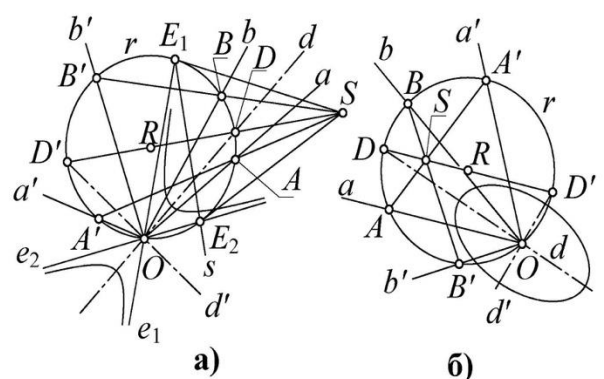


Рисунок 10 – Коникограф, действие 2 (построение главных диаметров  $d, d'$  и асимптот  $e_1, e_2$ )

Действие 3 (построение вершин). Если искомая КВП классифицирована как гипербола, то вписываем в угол  $e_1 \cap e_2$  произвольную окружность  $g$  (рис. 11).

Получаем гомологию “искомая КВП-окружность” с центром  $S=O$ , в которой точке касания  $E_0$  соответствует несобственная точка  $E_\infty$  гиперболы. Построив ось  $n$  гомологии, находим вершину  $D$  гиперболы как точку, гомологически соответствующую точке  $D_0$ . Если искомая КВП классифицирована как эллипс, то составляем не гомологию, а произвольное перспективно-аффинное соответствие “искомая КВП-произвольная окружность”.

Таким образом, для построения метрики КВП потребовалось выполнить всего три действия, которые сводятся к простейшим графическим операциям с участием прямых линий и окружностей. На основе графических алгоритмов составлена программа на языке AutoLisp, выполняющая автоматическое построение метрики КВП и её вычерчивание, исходя из указанного на экране дисплея заданного набора инцидентий (точек и касательных). Программа составлена для трёх специализаций: построение КВП по пяти точкам; построение КВП по пяти касательным; построение КВП по трём точкам и двум касательным. Для построения КВП, заданной другим набором инцидентий, надо предварительно найти дополнительные элементы (точки и касательные) искомой КВП, чтобы получить одну из запрограммированных специализаций.

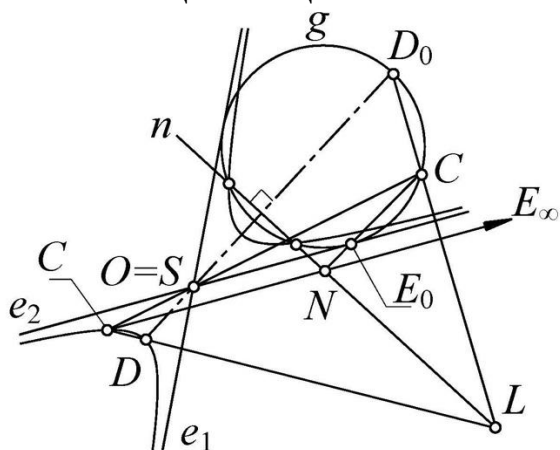


Рисунок 11 – Коникограф, действие 3 (построение вершин КВП)

## 9. Заключение

Полностью решена задача визуализации (восстановления, идентифика-

ции) кривой второго порядка, заданной любым набором как действительных, так и мнимых элементов (точек и касательных). Метрика искомой кривой определяется с помощью специализированной компьютерной программы, составленной на языке Autolisp на базе графического пакета Autocad. В предлагаемых графических алгоритмах используются лишь два графических примитива – прямая линия и окружность, поэтому точность построения равна точности представления этих простейших графических объектов в базовом графическом пакете. Алгоритмы визуализации и разработанное программное средство “Универсальный компьютерный коникограф” могут быть использованы как при решении задач вычислительной математики, так и в задачах компьютерного геометрического моделирования, связанных с использованием кривых второго порядка в качестве формообразующих элементов. Рассмотрен алгоритм построения соответственных точек в квадратичном отображении  $\Omega$ , заданном мнимыми фундаментальными точками. Формирование конструктивного алгоритма и его практическая реализация возможны лишь с помощью современных средств компьютерной визуализации.

## Список литературы

1. Клейн, Ф. Высшая геометрия: монография / Ф. Клейн. – М.: УРСС, 2004. – 400 с.
2. Суворов, Ф.М. Об изображении воображаемых точек и воображаемых прямых на плоскости и о построении кривых линий второй степени, определяемых с помощью воображаемых точек и касательных. – Казань: Типография императорского Университета. – 1884. – 130 с.
3. Вольберг, О.А. Основные идеи проективной геометрии: учебное пособие / О.А. Вольберг. – М.-Л.: Учпедгиз, 1949. – 188 с.
4. Пеклич, В.А. Мнимая начертательная геометрия: учебное пособие / В.А. Пеклич. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 104 с.

5. Гирш, А.Г. Наглядная мнимая геометрия: монография / А.Г. Гирш. – М.: ООО ИПЦ «Маска», 2008. – 216 с.
6. Гирш, А.Г. Комплексная геометрия – евклидова и псевдоевклидова: монография / А.Г. Гирш. – М.: ООО ИПЦ «Маска», 2013. – 216 с.
7. Короткий, В.А. Графические алгоритмы реконструкции кривой второго порядка, заданной мнимыми элементами / А.Г. Гирш, В.А. Короткий // Геометрия и графика. 2016. Т. 4. № 4. С. 19-30. DOI: 10.12737/22840.
8. Программа для ЭВМ «Построение кривой второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых» / В.А. Короткий // Свидетельство о государственной регистрации № 2011611961 от 04.03.2011 г.
9. Короткий, В.А. Синтетические алгоритмы построения кривой второго порядка / В.А. Короткий // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2014. – № 11. – С. 20-24.
10. Короткий, В.А. Универсальный компьютерный коникограф / В.А. Короткий, Л.И. Хмарова // Труды 26-й Международной научной конференции GraphiCon 2016 (19-23 сентября 2016), ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия. – С. 347-351.
11. Короткий, В.А. Квадратичное преобразование плоскости, установленное пучком конических сечений / В.А. Короткий // Омский научный вестник. – 2013. – № 1(117). – С. 9-14.
12. Кокстер, Х.С.М. Действительная проективная плоскость: монография / Х.С.М. Кокстер. – М.: Физматлит, 1959. – 280 с.
13. Иванов, Г.С. Конструирование технических поверхностей. Математическое моделирование на основе нелинейных преобразований / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1987. – 192 с.
14. Андреев, К.А. О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий / К.А. Андреев – М.: Издание Московского Математического общества, состоящего при Императорском Московском Университете, 1879. – 168 с.